MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2015-01-16.
Lösningar

1. Vi ser att siffersumman av 30723 är 15 vilket är delbart med 3 och därmed är talet självt delbart med 3 och vi får $30723/3 = 10241$. Siffersumman är nu 8, så inga fler treor och uppenbarligen inte delbart med 5. Vi testar dela med 7 och får $10241/7 = 1463$. Vi testar att dela med 7 igen och får $1463/7 = 209$. Nu är 209 inte delbart med 7 men när vi delar med 11 finner vi att $209/11 = 19$. Vi får till slut att
$$30723 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19.$$
Enligt formeln för Eulers Phi-funktion får vi att
$$\Phi(30723) = \Phi(3) \cdot \Phi(7^2) \cdot \Phi(11) \cdot \Phi(19) = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 18 = 15120.$$

2. Vi har möjligheterna att antalet röda bollar är 0, 2 eller 4. Man kan välja k röda bollar på $\binom{10}{k}$ sätt och $5-k$ blåa bollar på $\binom{8}{5-k}$ sätt. Totalt blir det alltså
$$\binom{10}{0}\binom{8}{5} + \binom{10}{2}\binom{8}{3} + \binom{10}{4}\binom{8}{1} = 1 \cdot 56 + 45 \cdot 56 + 210 \cdot 8 = 4256.$$

3. Vi ser direkt att 2 uppenbarligen är en lösning till den första och den sista ekvationen. Därmed blir den allmänna lösningen till dessa två ekvationer
$$x = 2 + 7 \cdot 11n = 2 + 77n,\ n \in \mathbb{Z}.$$
Vi sätter in detta i den andra ekvationen och får
$$2 + 77n \equiv 7 \pmod{19} \iff 77n \equiv 5 \pmod{19} \iff n \equiv 5 \pmod{19}$$
eftersom $77 = 4 \cdot 19 + 1$. Alltså är $n = 5 + 19k$, $k \in \mathbb{Z}$, så vi får till slut att
$$x = 2 + 77n = 2 + 77(5 + 19k) = 387 + 77 \cdot 19k = 387 + 1463k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Vi gör ett induktions bevis och börjar med att kontrollera två (eftersom det är två startvärden på rekursionen) basfall:
$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = F(0) \text{ och } 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1 = F(1).$$
Stämmer alltså för $n = 0$ och $n = 1$.

   Induktionssteg. Antag att påståendet gäller för alla k med $0 \leq k < n$ där $n \geq 2$, dvs $F(k) = 3^k - 2^k$. Vi ska visa att i så fall gäller det också för n, d v s $F(n) = 3^n - 2^n$. Vi får med hjälp av definitionen av rekursionen samt antagandet att
$$\begin{aligned} F(n) &= 5F(n-1) - 6F(n-2) = 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) \\ &= (5 \cdot 3 - 6)3^{n-2} + (6 - 5 \cdot 2)2^{n-2} = 9 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 2^{n-2} = 3^n - 2^n. \end{aligned}$$
Med stöd av basfallen och induktionssteget samt principen om total induktion så gäller nu att $F(n) = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

5. Man kan (om man vill) kontrollera att $\mathcal{R}$ är både reflexiv och transitiv. Dock ser vi att:

   (a) Låt B vara en delmängd med bara ett element och $C = M$. Då finns det injektiva funktioner från B till C, men inte från C till B (eftersom C innehåller fler element än B). Alltså är $B\mathcal{R}C$ men inte $C\mathcal{R}B$ och därmed är $\mathcal{R}$ ej symmetrisk och alltså ingen ekvivalensrelation.

   (b) Låt B och C vara två olika mängder med 1 element (finns eftersom M innehåller minst två elememt). Då finns en (unik) injektiv funktion från B till C och en från C till B som avbildar det enda elementet i den ena mämgden på det enda elementet i den andra. Alltså har vi $B\mathcal{R}C$ och $C\mathcal{R}B$ men $B \neq C$ och därmed är den inte antisymmetrisk och därmed inte en partiell ordning.

6. Vi använder oss av Eulers sats som säger att $a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ om a och n är relativt prima. Eftersom 17 är ett primtal så gäller att $\Phi(17) = 16$. Vi har att $2015 \equiv 9 \pmod{17}$ och $2015 = 125 \cdot 16 + 15$. Det ger

   $$2015^{2015} \equiv 9^{2015} \equiv 9^{125\cdot 16+15} \equiv \left(9^{16}\right)^{125} \cdot 9^{15} \equiv 1^{125} \cdot 9^{15} \equiv 9^{15} \pmod{17}.$$

   Successiva kvadreringar modulo 17 ger $9^2 \equiv 13$, $9^4 \equiv 13^2 \equiv -1$ och $9^8 \equiv 1$.

   $$2015^{2015} \equiv 9^{15} \equiv 9 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^8 \equiv 9 \cdot -4 \cdot -1 \cdot 1 = 36 \equiv 2 \pmod{17}.$$

   Svaret är alltså 2.

7. (a) Vi ska kontrollera att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

   Reflexiv: Låt g vara identitetsfunktionen. Då gäller att $f = g \circ f \circ g^{-1}$ för varje funktion f och alltså är $f\mathcal{R}f$ så $\mathcal{R}$ är reflexiv.

   Symmetrisk: Antag att $f_1\mathcal{R}f_2$ så att $f_1 = g \circ f_2 \circ g^{-1}$. Om vi sätter samman båda leden med g^{-1} från vänster och g från höger så får vi att

   $$g^{-1} \circ f_1 \circ g = g^{-1} \circ (g \circ f_2 \circ g^{-1}) \circ g = (g^{-1} \circ g) \circ f_2 \circ (g^{-1} \circ g) = f_2,$$

   så $f_2\mathcal{R}f_1$ och därmed är den symmetrisk.

   Transitiv: Antag att $f_1\mathcal{R}f_2$ och $f_2\mathcal{R}f_3$ så att $f_1 = g \circ f_2 \circ g^{-1}$ och $f_2 = h \circ f_3 \circ h^{-1}$. Då gäller att

   $$f_1 = g\circ(h\circ f_3\circ h^{-1})\circ g^{-1} = (g\circ h)\circ f_3\circ(h^{-1}\circ g^{-1}) = (g\circ h)\circ f_3\circ(g\circ h)^{-1}$$

   och alltså är $f_1\mathcal{R}f_3$ och relationen är transitiv.

   (b) Antag $f_1\mathcal{R}f_2$ och att f_2 är inverterbar. Då gäller att

   $$f_1 = g \circ f_2 \circ g^{-1}$$

   och därmed att $g \circ f_2^{-1} \circ g^{-1}$ är invers till f_1 (sammansättningen med f_1 blir identitetsfunktionen) som alltså är inverterbar.

(c) Låt $f_1(x) = a$ för alla x och $f_2(x) = b$ för alla x vara två godtyckliga konstanta funktioner. Vi låter $g : A \longrightarrow A$ vara den inverterbara funktionen

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{om } x = b \\ b, & \text{om } x = a \\ x, & \text{annars.} \end{cases}$$

Man kontrollerar direkt att g är invers till sig själv och alltså inverterbar. Vi får nu att

$$g \circ f_2 \circ g^{-1}(x) = g(f_2(g^{-1}(x))) = g(b) = a$$

oavsett vad x är. Alltså är $f_1 = g \circ f_2 \circ g^{-1}$ och därmed $f_1 \mathcal{R} f_2$ vilket var precis det vi skulle visa.

8. Vi gör induktion över antalet noder, $|V|$, i G.

Basfall: Med $|V| = 2$ finns det bara en möjlig sammanhängande graf och om man plockar bort en av noderna så blir det bara en ensam nod kvar och denna utgör en sammanhängande graf. Alltså stämmer påståendet för alla grafer med $|V| = 2$.

Induktionssteg: Antag nu att det gäller för alla grafer med $|V| < n$ där $n \geq 3$. Vi ska visa att i så fall gäller det för alla grafer med $|V| = n$. Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig graf med $|V| = n$. Om G_x är sammanhängande för alla $x \in V$ så är saken klar för då finns det minst 3 noder som uppfyller kriteriet. Vi kan därför anta att det finns en nod y sådan att G_y inte är sammanhängande. Det betyder att G_y består av ett antal sammanhängande komponenter $K_1, K_2, \ldots, K_m$ där $m \geq 2$. Givet en sådan komponent K_i låt K_i' vara den sammanhängande graf man får genom att lägga till y och alla kanter i den ursprungliga grafen G mellan y och noderna i K_i. Antalet noder i K_i' är mindre är antalet noder i G, så enligt antagandet finns det minst två noder i K_i' som är sådana att man kan ta bort en av dem från K_i' och fortfarande ha en sammanhängande graf. Låt $x_i \neq y$ vara en av dessa. Då kommer G_{x_i} att vara sammanhängande då denna innehåller y som binder samman de olika (sammanhängande) komponenterna. Eftersom det finns minst två komponenter så finns det minst två sådana x_i och vi har därmed visat att det gäller för en godtycklig graf med $|V| = n$.

Med stöd av basfall och induktionssteg så gäller enligt principen för total induktion att alla sammanhängande grafer med minst 2 noder har minst två noder x så att G_x är sammanhängande.