MATEMATISKA VETENSKAPER
Tentamen i Diskret matematik, TMV200, 2016-08-26 kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosor.
Examinator: Seidon Alsaody.
Telefonvakt: Johannes Borgqvist, ankn 5325

För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng, inklusive eventuell bonus från veckoutmaningarna under HT2015. Maxpoängen är 6 poäng på varje uppgift, utom uppgift 4 där maxpoängen är 8 poäng.

Skriv tydligt och strukturerat och motivera väl; dina resonemang är minst lika viktiga som dina svar! Lycka till!

---

1. (a) Argumentet är giltigt: den sist hypotesen medför att p är sann och u falsk. Från första hypotesen följer då att r är sann, och från den tredje att s är sann. Andra hypotesen ger då att t är sann.

   (b) Påståendet är falskt. Oavsett vad x och y är, existerar det z så att $xy+z \neq 1$ (välj t ex $z = 2 - xy$).

2. Vi har att lösa följande kongruenssystem

$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 7.$$

   Genom prövning eller beräkning ses att en lösning är $x = 51$. Då 3, 5 och 7 är relativt prima och $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ ger kinesiska restsatsen att samtliga lösningar ges av $x = 51 + 105n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Värdemängden är alla heltalspotenser av 2, dvs $\ldots, 1/4, 1/2, 1, 2, 4 \ldots$. Funktionen är därför inte surjektiv, ty t ex värdet 3 inte antas. Den är därför inte heller bijektiv. Däremot är den injektiv, ty om $2^x = 2^y$ så är $2^{x-y} = 2^x/2^y = 1$, dvs $x - y = 0$, så $x = y$.

4. (a) Om man först tar hänsyn till gruppernas namn (kalla grupperna A, B, C och D), så kan man först välja vilka 4 lag som ska vara i grupp A på $\binom{16}{4}$ sätt, sedan vilka som ska vara i grupp B på $\binom{12}{4}$ sätt, sedan vilka som ska vara i grupp C på $\binom{8}{4}$ sätt, och de sista hamnar automatiskt i grupp D. För att bortse från gruppernas namn måste man sedan dividera med antalet permutationer av de 4 grupperna, som är 4!. Antalet sätt blir därför

$$\frac{1}{4!}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{16 \cdots 5}{(4!)^4} = \frac{16!}{(4!)^5}.$$

   (b) Nu bestäms grupperna av att lag 1-4 spelar i dem, vilket betyder att vi bland de 12 kvarvarande lag ska välja 3 som ska spela med lag 1, sedan bland de 9 kvarvarande lagen 3 som ska spela med lag 2, och sedan bland de 6 kvarvarande lagen 3 som ska spela med lag 3. Detta kan göras på

$$\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{12 \cdots 4}{(3!)^3} = \frac{12!}{(3!)^4}$$

sätt.

(c) Vi ska välja 2 bland 4, och upprepa detta 4 gånger, vilket kan göras på

$$\binom{4}{2}^4 = 6^4 = 1296$$

sätt.

(d) För varje grupp kan man, efter att två lag valts, rangordna dem på 2 sätt. Utifrån svaret i (c) kan alltså detta göras på sammanlagt $2^4 \cdot 1296 = 16 \cdot 1296$ sätt.

5. Basfallet för $n = 1$ är $1+a \geq 1+a$, vilket stämmer. Antag nu att vi visat $(1+a)^n \geq 1+na$ för ett visst n. Då gäller

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a),$$

eftersom $(1 + a)^n \geq 1 + na$ enligt induktionsantagandet, och $1 + a \geq 0$. Vidare gäller

$$(1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2,$$

vilket är större än eller lika med $1 + (n + 1)a$ ty $na^2 \geq 0$. Sammantaget har vi visat

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$$

och induktionssteget är klart. Tillsammans med basfallet ger detta enligt induktionsprincipen att påståendet är sant.

6. Den är reflexiv om och endast om $x \equiv x + 3 \pmod{n}$, dvs $n|(x + 3) - x$, dvs $n|3$, dvs $n = 3$.

För symmetri, antag att xRy och undersök när detta medför att yRx. Om xRy gäller $x \equiv y + 3 \pmod{n}$, och då är $x + 3 \equiv y + 6 \pmod{n}$, så $y \equiv x + 3 \pmod{n}$ om och endast om $y \equiv y + 6 \pmod{n}$, dvs $n|(y + 6) - y$, dvs $n|6$, dvs $n = 2$ eller $n = 3$ eller $n = 6$.

För transitivitet, antag att xRy och yRz och undersök när detta medför att xRz. Om xRy och yRz gäller $x \equiv y + 3 \pmod{n}$, och $y \equiv z + 3 \pmod{n}$, och då är $x \equiv z+6 \pmod{n}$. Det medför att $x \equiv z+3 \pmod{n}$ om och endast om $z+6 \equiv z+3 \pmod{n}$, dvs $n|(z + 3) - (z + 6)$, dvs $n| - 3$, dvs $n = 3$.

(Fotnot: när $n = 3$ är relationen inget annat än kongruens modulo 3.)

7. (a) Funktionen $\phi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ definieras av att $\phi(n)$ är antalet positiva heltal mindre än eller lika med n som är relativt prima med n, och $\phi(2) = 1$.

(b) Talet n kan primtalsfaktoriseras som $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ där $p_1, \ldots, p_r$ är olika primtal och $k_1 \ldots k_r$ är positiva heltal. Eftersom primtalspotenserna är parvis relativt prima är $\phi(n) = \phi(p_1^{k_1}) \cdots \phi(p_r^{k_r})$. En produkt av heltal är udda om och endast om varje faktor är udda, så vi måste visa att om $n > 2$ så är minst ett $\phi(p_i^{k_i})$ jämnt. Men om p är ett primtal och k ett positivt heltal så är

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1).$$

Om p är udda är $p-1$ jämnt, och om $p = 2$ (det enda jämna primtalet) och $k-1 > 0$ är p^{k-1} jämnt. Eftersom $n > 2$ måste minst en faktor $p_i^{k_i}$ uppfylla att antingen p är udda eller $p = 2$ och $k > 1$, och då är $\phi(p_i^{k_i})$ jämnt. Beviset är fullbordat.

8. (a) Det finns 6 möjliga grafer som fås genom att ta bort någon av de 6 kanterna i $\boxtimes$.

   (b) De är alla isomorfa. De 4 som fås genom att ta bort en ytterkant är uppenbart isomorfa med varandra ("vrid" en av dem ett kvarts varv, ett halvt varv eller tre kvarts varv för att få de andra). På liknande sätt är de två graferna med varsin diagonal borttagen isomorfa med varandra. Om man tar grafen med toppkanten borttagen och vänder upp den ena toppnoden över bottenkanten, får man en graf med ena diagonalen borttagen. Därmed är alla grafer isomorfa med varandra. (Vill man kan man formulera detta i explicita isomorfismer genom att numrera noderna.)

   (c) För var och en av graferna gäller att Eulercykler saknas, eftersom två noder har gradtal 3, som är udda. Det finns därför en Eulerväg som börjar i den ena sådana noden och slutar i den andra, eftersom de övriga noderna har gradtal 2.