MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2015-01-16.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Stefan Lemurell, 070-291 70 41.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Primtalsfaktorisera $n = 30723$ och beräkna $\Phi(n)$, d v s Eulers phi-funktion av n. (Du måste ange värdet på $\Phi(n)$ som ett heltal för full poäng.) (6p)

2. Det finns 10 röda och 8 blåa numrerade bollar. Med andra ord så är alla bollar olika. Vi ska välja ut 5 bollar så att det blir ett jämnt antal röda (och följdaktligen ett udda antal blåa) bollar. På hur många sätt kan man göra detta? Ange antalet som ett heltal för att få full poäng. (Glöm inte att 0 stycken också är ett jämnt antal.) (6p)

3. Bestäm alla lösningar till följande system av kongruenser

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 7 \pmod{19} \\ x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$$

(6p)

4. Vi definierar en funktion $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(1) = 1, \\ F(n) = 5F(n-1) - 6F(n-2), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att $F(n) = 3^n - 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (6p)

5. Låt M vara en mängd med minst 2 element. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på mängden av alla icketomma delmängder till M genom att säga att B är relaterad till C, $B\mathcal{R}C$, om och endast om det finns (minst) en injektiv funktion $f : B \longrightarrow C$.

   (a) Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation?

   (b) Är $\mathcal{R}$ en partiell ordning?

   (6p)

Var god vänd!

6. Bestäm det minsta positiva heltalet som är kongruent med 2015^{2015} modulo 17. (6p)

7. Låt A vara en godtycklig mängd med minst 2 element och låt M vara mängden av alla funktioner från A till sig själv, d v s funktioner $f : A \longrightarrow A$. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på M genom $f_1 \mathcal{R} f_2$ om och endast om det finns inverterbar $g \in M$ sådan att $f_1 = g \circ f_2 \circ g^{-1}$.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Visa att om $f_1 \mathcal{R} f_2$ och f_2 är inverterbar, så är också f_1 inverterbar.

   (c) Visa att alla konstanta funktioner är relaterade till varandra. (En funktion f är konstant om det finns $a \in A$ så att $f(x) = a$ för alla $x \in A$.)

   (8p)

8. Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande graf med $|V| \geq 2$, d v s med minst 2 noder. Om x är en nod i G så låter vi $G_x = (V \setminus \{x\}, E_x)$ vara (den inducerade) delgrafen till G man får om man plockar bort x och behåller så många kanter som möjligt. Visa att man alltid kan hitta minst 2 noder $x \in V$ så att G_x är sammanhängande. (Tips: Testa med att göra induktion över antalet noder. Notera också att en graf som bara består av en enda nod (och därmed inga kanter) betraktas som en sammanhängande graf.) (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 6 februari. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 11:00 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.