FJÄRDE VECKOUTMANINGEN

DISKRET MATEMATIK

Vi fortsätter med delbarhet och kongruens.

Problem 1. [1] Ett tal är angivet som en potens av 2, men någon har spillt kaffe mitt på exponenten, och det enda man kan läsa är $2^{528****7301}$. (Det är oklart hur många siffror som döljer sig bakom $****$.) Er uppgift är att bestämma de två sista siffrorna (dvs entals- och tiotalssiffran) i talet.

(1) Skriv upp de två sista siffrorna i 2^n för $1 \leq n \leq 30$. Ser ni något mönster som kan leda till svaret?

(2) Försök att hitta ett bevis för detta som inte kräver att man skriver upp många 2-potenser.

Problem 2. I skolan lär man sig ibland att ett tal är delbart med nio om och endast om siffersumman är delbar med nio. (Exempelvis är 882 delbart med 9 och $8+8+2=18$ är delbart med 9.) Bevisa detta! (Ledning: $9+1=10$.) Säger detta även någonting om siffersummans betydelse för delbarhet med tre?

Problem 3. Låt $p=5$. Vilka element i $\mathbb{Z}_p$ är sin egen invers med avseende på multiplikation? Vad är produkten $[1]\cdot[2]\cdots[p-1]$ av alla nollskilda element i $\mathbb{Z}_p$? Upprepa för $p=7$ och $p=11$. Kan ni dra någon slutsats om produkten ifall p är ett godtyckligt primtal? Försök bevisa den! (Ledning: Försök förenkla produkten $[1]\cdot[2]\cdots[p-1]$ med hjälp av definitionen av invers.)

Problem 4. Låt $n=6$. Vad är produkten $[1]\cdot[2]\cdots[n-1]$ av alla nollskilda element i $\mathbb{Z}_n$? Upprepa för $n=8$ och $n=9$. Kan ni dra någon slutsats om produkten för ett godtyckligt icke-primtal $n>4$? Försök argumentera för den! Vad händer då $n=4$?

Bonusproblem. Tag något primtal p och ett positivt heltal a som inte är delbart med p. Räkna ut vilken rest a^{p-1} ger vid division med p. (Prova några olika a och p.) Kan du göra en allmän hypotes? Kan du bevisa den utifrån något vi lärt oss?

[1] Källa: Professor Alberto Elduque, Universidad de Zaragoza, Spanien.