Tentamen i Diskret matematik, TMV200, 2016-01-15
Lösningsförslag

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt, antingen med en motivering om så är fallet, eller med ett motextempel om så inte är fallet:

$$\begin{array}{r} p \vee \neg q \\ (r \vee s) \to q \\ (r \wedge t) \to \neg p \\ p \to t \\ \hline \neg r \end{array} .$$

(b) Är utsagan

$$\forall x \exists y \forall z : x + y + z > 0$$

sann, om universum antas vara mängden $\mathbb{R}$?

Lösning:

(a) Argumentet är giltigt: antag att hypoteserna är sanna och slutsatsen falsk, dvs r sann. Andra hypotesen ger då att q är sann, varför första hypotesen ger att p är sann. Fjärde hypotesen ger då att t är sann, varur tredje hypotesen ger (eftersom r antogs sann) att p är falsk. Därmed är p både sann och falsk, en motsägelse.

(b) Utsagan är falsk. Om t ex $x = -1$ så finns det för alla y ett z (t ex $z = -y$) så att $x + y + z \leq 0$. (I själva verket finns det motexempel för varje x.)

2. År k är det riksdagsval i Sverige precis då $4|(k + 2)$ och EU-parlamentsval precis då $5|(k + 1)$. Antag att det alltid kommer att vara så. Om båda valen innefaller samma år kallas året för ett supervalår. Vilket är första året efter år 3 000 som både är ett supervalår och delbart med 9?

Lösning: Vi behöver lösa kongruenssystemet

$$\begin{cases} k \equiv -2 \pmod 4 \\ k \equiv -1 \pmod 5 \\ k \equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

Vi kan börja med att bestämma alla supervalår, dvs vänta med sista raden. Genom att lösa en diofantisk ekvation, eller genom att bara testa lämpliga tal, ser man att -6 är ett sådant tal. Kinesiska restsatsen ger då att varje supervalår k uppfyller $k = -6 + 20x$ för något heltal x, eftersom 4 och 5 är relativt prima. Vi undrar sedan vilka som är kongruenta med 0 modulo 9, dvs vi söker lösningar till den diofantiska ekvationen

$$-6 + 20x = 9y.$$

Vi skriver om denna som $20x - 9y = 6$ och noterar att 20 och 9 är relativt prima. Euklides algoritm med återsubstitution ger att $20 \cdot (-4) + 9 \cdot 9 = 1$, och multiplikation med 6 ger då $20 \cdot (-24) + 9 \cdot 54 = 6$. Värdet $x = -24$ ger $k = -6 - 20x = -486$, så $k = -486$ är en möjlighet, och kinesiska restsatsen ger att alla sådana k ges av $k = -486 + 180m$, m heltal. Det minsta sådana k som är större än 3 000 fås då $m = 20$, vilket ger svaret $k = -486 + 3600 = 3114$.

3. På hur många sätt kan man välja en 5-siffrig kod (dvs ordnad talföljd) om ...

   (a) precis en siffra ska vara ett primtal?

   (b) de tre första siffrorna måste vara sinsemellan olika?

   (c) alla siffror måste vara olika och minst två siffror ska vara jämna?

   Lösning:

   (a) Bland siffrorna 0-9 är 4 primtal och 6 inte primtal. Vi väljer primtalets plats på 5 sätt, primtalet på 4 sätt och de övriga talen på 6 sätt vardera. Multiplikationsprincipen ger att detta kan göras på $4 \cdot 5 \cdot 6^4$ sätt (vilket är lika med 25920).

   (b) Vi kan välja första siffran på 10 sätt, andra på 9 och tredje på 8 sätt. Övriga två siffror väljs fritt bland alla 10. Multiplikationsprincipen ger att detta kan göras på $8 \cdot 9 \cdot 10^3 = 72000$ sätt.

   (c) Det finns $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ sätt att välja en kod vars alla siffror är olika. Från detta tal ska vi subtrahera $5! = 120$ koder som bara består av udda siffror, samt det antal koder som består av precis en jämn siffra. Sådana koder kan konstrueras genom att på 5 sätt välja var den jämna siffran ska vara, på 5 sätt välja den jämna siffran, och på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ sätt de udda siffrorna, så antalet sådana är $5^3 \cdot 24 = 3000$. Svaret är alltså $30240 - 3120 = 27120$.

   Det är inte nödvändigt att räkna ut alla multiplikationer och liknande för att svaret ska räknas som korrekt.

4. På mängden $\mathbb{Z}$ av alla heltal definierar vi de två relationerna R och S enligt

$$xRy \iff (x|y \vee y|x) \quad \text{och} \quad xSy \iff (x|y \wedge y|x).$$

   (a) Är R en ekvivalensrelation? Om ja, bevisa detta *och* ange alla ekvivalensklasser. Om nej, motivera varför.

   (b) Är S en ekvivalensrelation? Om ja, bevisa detta *och* ange alla ekvivalensklasser. Om nej, motivera varför.

   Var god vänd!

   Lösning:

   (a) Nej, den är inte transitiv. T ex gäller $2R6$ och $6R3$, men inte $2R3$.

   (b) Ja. Notera att xSy om och endast om $x = \pm y$, som är en reflexiv, symmetrisk och transitiv relation. Från detta inser man även att det finns en ekvivalensklass som innehåller precis ett heltal, nämligen 0, och övriga klasser är $\{1, -1\}$, $\{2, -2\}$ osv, dvs alla (!) ekvivalensklasser är på formen $\{a, -a\}$ för något ickenegativt heltal a.

5. Visa att varje positivt heltal n uppfyller $(2n)!/(n!)^2 \leq 2^{2n-1}$.

   Lösning: Detta visas enklast med induktion. Basfallet för $n = 1$ är $2 \leq 2$, vilket stämmer. Antag nu att vi visat $(2n)!/(n!)^2 \leq 2^{2n-1}$ för ett visst n. Vi ska visa att

$$(2(n+1))!/((n+1)!)^2 \leq 2^{2(n+1)-1}.$$

Notera att högerledet är 2^{2n+1}. Vi utvecklar vänsterledet, vilket ger

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \leq 2^{2n-1}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

där det sista steget följer ur induktionsantagandet. Tvåpotensen vi fått fram är en faktor 2^2 från den vi söker. Genom att bryta ut en tvåa från vardera parentes får vi

$$2^{2n-1}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = 2^{2n-1}\cdot 4\frac{(n+1/2)(n+1)}{(n+1)(n+1)} = 2^{2n+1}\frac{(n+1/2)}{(n+1)} \leq 2^{2n+1},$$

och induktionssteget är klart. Tillsammans med basfallet ger detta enligt induktionsprincipen att påståendet är sant.

6. Låt A vara en mängd med 3 element och B en mängd med 5 element.

   (a) Hur många injektiva funktioner finns det från A till B?

   (b) Hur många surjektiva funktioner finns det från A till B?

   (c) Hur många injektiva funktioner finns det från B till A?

   (d) Hur många surjektiva funktioner finns det från B till A?

   (e) Hur många bijektiva funktioner finns det från B till B själv?

   Lösning: Kalla elementen i A för a, b och c och elementen i B för d, e, f, g och h. Varje funktion svarar mot precis ett sätt att avbilda elementen i definitionsmängden på elementen i målmängden.

   (a) Vi kan abilda a på 5 olika element, b på 4 olika och c på 3 element, eftersom injektiviteten förbjuder olika element att avbildas på samma element. Det finns därför $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ sådana funktioner.

   (b) Inga, ty $|A| < |B|$, och samma element kan inte avbildas på mer än ett element.

   (c) Inga, ty $|B| > |A|$, så olika element kommer att avbildas på samma element.

   (d) Detta är den mest krävande uppgiften. Surjektiviteten tvingar de 5 elementen i B att avbildas så att alla element i A är i värdemängden. Antingen kommer ett element i A att "träffas" av tre element från B, och de övriga två av varsitt element från B, eller så träffas två element i A av två element vardera från B, och det tredje av precis ett. Funktioner av den första typen svarar mot att vi först väljer vilket element som ska träffas av tre element (3 möjligheter), sedan vilka element i B som ska avbildas på det (5 över 3 möjligheter, vilket är lika med 10) och slutligen hur de två sista elementen i B ska avbildas på de två kvarvarande elementen i A (två möjligheter); totalt ger detta 60 möjliga funktioner. Funktioner av den andra typen konstrueras genom att först välja vilket element i A som endast ska träffas av ett element från B (3 möjligheter) samt vilket element ur B som avbildas dit (5 möjligheter) och därefter vilka 2 av de 4 kvarvarande elementen i B som ska avbildas på det ena av de två kvarvarande elementen i A (4 över 2 möjligheter, vilket är 6). De två sista elementen i B avbildas då automatiskt på det andra elementet; totalt ger detta 90 möjligheter. Svaret är alltså 150.

   (e) En bijektiv funktion från B till B är med andra ord en permutation av elementen i B, och det finns $5! = 120$ sådana.

7. Visa att om ett naturligt tal är kongruent med 3 modulo 4, så har det minst ett primtal som också är kongruent med 3 modulo 4 i sin primtalsfaktorisering.

   Lösning: Om ett tal är kongruent med 3 modulo 4, så är det udda, så det är en produkt av udda primtal. Varje primtal i faktoriseringen är därför kongruent med 1 eller 3 modulo 4, och vi måste utesluta att alla är kongruenta med 1. Antag att de vore det. Notera att produkten av två tal som är kongruenta med 1 modulo 4 själv är kongruent med 1, ty

$$(4m+1)(4n+1) = 16mn + 4m + 4n + 1 = 4(4mn + m + n) + 1$$

   för alla $m, n \in \mathbb{Z}$. Genom successiv tillämpning av detta får vi att om alla primtalsfaktorer är kongruenta med 1 modulo 4, så är även deras produkt det. Detta motsäger att den är kongruent med 3 modulo 4, och därför måste minst en primtalsfaktor vara kongruent med 3 modulo 4.

8. Låt $G = (V, E)$ vara en ändlig graf. *Komplementgrafen* $G' = (V, E')$ är den graf som har samma noder som G, och där kanterna bestäms av att

$$\{x, y\} \in E' \Leftrightarrow \{x, y\} \notin E.$$

   (a) Rita komplementgrafen G' till den cykliska grafen med 4 noder. Är G' sammanhängande?

   (b) Visa att om G inte är sammanhängande, så är komplementgrafen G' sammanhängande.

   (c) Gäller det att om G har minst 2 noder och är sammanhängande, så är G' inte sammanhängande? Bevis eller motexempel!

   Lösning:

   (a) G' består av 4 noder som utgör två komponenter som var och en ser ut som $\bullet - \bullet$. Därmed är G' inte sammanhängande.

   (b) Vi måste visa att det finns en väg i G' mellan varje par av olika noder. Låt därför x och y vara två olika noder (notera att G och G' har samma noder). Antingen tillhör x och y olika komponenter i G, eller så tillhör de samma komponent. Om de tillhör olika komponenter i G finns det ingen kant i G mellan dem, och per definition av G' finns det en kant i G' mellan dem. Därmed finns det en väg i G' mellan dem. Om de tillhör samma komponent i G, så kan vi välja någon nod z som tillhör en annan komponent i G (G har minst två komponenter eftersom den inte är sammanhängande enligt antagandet). På samma sätt som ovan drar vi slutsatsen att det finns en kant i G' mellan x och z, och en mellan y och z. Därmed finns det en väg $(x - z - y)$ mellan x och y.

   (c) Nej. Om G t ex är 4-cykeln med en valfri kant borttagen, så är G' sammanhängande. (Både G och G' är isomorfa med $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet$.)