MATEMATISKA VETENSKAPER
Tentamen i Diskret matematik, TMV200, 2016-01-15 kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosor.
Examinator tillika telefonvakt: Seidon Alsaody, 073-990 96 58.
Besökstider: ca 15.00 och 17.00

För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng, inklusive eventuell bonus från veckoutmaningarna. Om inget anges är maxpoängen 6 poäng på varje uppgift nedan.

Skriv tydligt och strukturerat och motivera väl; dina resonemang är minst lika viktiga som dina svar! Lycka till!

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt, antingen med en motivering om så är fallet, eller med ett motextempel om så inte är fallet:

$$\begin{array}{r} p \vee \neg q \\ (r \vee s) \to q \\ (r \wedge t) \to \neg p \\ p \to t \\ \hline \neg r \end{array} .$$

   (b) Är utsagan

$$\forall x \exists y \forall z : x + y + z > 0$$

   sann, om universum antas vara mängden $\mathbb{R}$?

2. År k är det riksdagsval i Sverige precis då $4|(k+2)$ och EU-parlamentsval precis då $5|(k+1)$. Antag att det alltid kommer att vara så. Om båda valen innefaller samma år kallas året för ett supervalår. Vilket är första året efter år 3 000 som både är ett supervalår och delbart med 9?

3. På hur många sätt kan man välja en 5-siffrig kod (dvs ordnad talföljd) om ...

   (a) precis en siffra ska vara ett primtal?

   (b) de tre första siffrorna måste vara sinsemellan olika?

   (c) alla siffror måste vara olika och minst två siffror ska vara jämna?

4. På mängden $\mathbb{Z}$ av alla heltal definierar vi de två relationerna R och S enligt

$$xRy \iff (x|y \vee y|x) \quad \text{och} \quad xSy \iff (x|y \wedge y|x).$$

   (a) Är R en ekvivalensrelation? Om ja, bevisa detta *och* ange alla ekvivalensklasser. Om nej, motivera varför.

   (b) Är S en ekvivalensrelation? Om ja, bevisa detta *och* ange alla ekvivalensklasser. Om nej, motivera varför.

Var god vänd!

5. Visa att varje positivt heltal n uppfyller $(2n)!/(n!)^2 \leq 2^{2n-1}$.

6. Låt A vara en mängd med 3 element och B en mängd med 5 element.

   (a) Hur många injektiva funktioner finns det från A till B?

   (b) Hur många surjektiva funktioner finns det från A till B?

   (c) Hur många injektiva funktioner finns det från B till A?

   (d) Hur många surjektiva funktioner finns det från B till A?

   (e) Hur många bijektiva funktioner finns det från B till B själv? (8p)

7. Visa att om ett naturligt tal är kongruent med 3 modulo 4, så har det minst ett primtal som också är kongruent med 3 modulo 4 i sin primtalsfaktorisering.

8. Låt $G = (V, E)$ vara en ändlig graf. *Komplementgrafen* $G' = (V, E')$ är den graf som har samma noder som G, och där kanterna bestäms av att

$$\{x, y\} \in E' \Leftrightarrow \{x, y\} \notin E.$$

   (a) Rita komplementgrafen G' till den cykliska grafen med 4 noder. Är G' sammanhängande?

   (b) Visa att om G inte är sammanhängande, så är komplementgrafen G' sammanhängande.

   (c) Gäller det att om G har minst 2 noder och är sammanhängande, så är G' inte sammanhängande? Bevis eller motexempel!