Lösningar för tenta i TMV200 Diskret matematik 2018-01-12 kl. 14:00–18:00

1. Svar: Ja, det gäller, vilket kan visas på flera sätt (se nedan).

Alternativ 1 (induktionsbevis): Vi inför predikatet

$$P(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

med universum $\mathbb{Z}_+$. Eftersom $\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1}$ är $P(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.

Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. Antag därför att $P(n)$ är sann. Det gäller nu att

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

där de cinnoberröda bitarna ovan är lika enligt antagandet att $P(n)$ är sann. Vi har funnit att

$$P(n+1): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

är sann så fort $P(n)$ är sann, dvs induktionssteget $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ gäller.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $P(n)$ är sann för alla $n\in\mathbb{Z}_+$.

Alternativ 2 (teleskopsumma): Vi vill visa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

dvs att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$. Tricket här är att komma på att

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

och göra ett variabelbyte i den ena summan. Utnyttjar vi detta får vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},\end{aligned}$$

vilket visar att ekvationen gäller för alla $n\in\mathbb{Z}_+$.

2. Vi försöker hitta ett motsägelsebevis (eller ett motexempel). Vi antar därför att slutsatsen $r \leftrightarrow p$ är falsk, dvs att r och p har olika sanningsvärden, och ser om detta kan ske medan de tre hypoteserna är sanna.

Om $r = S$ och $p = F$ är slutsatsen förvisso falsk, men det är även första hypotesen. En motsägelse alltså.

Om $r = F$ och $p = S$ är slutsatsen falsk. Första hypotesen är automatiskt sann. För att andra hypotesen skall vara sann måste $q = S$. Med dessa sanningsvärden blir $p \to q$ sann, och tredje hypotesen blir således falsk. Vi får alltså en motsägelse även i detta fall.

Om slutsatsen är falsk måste alltså någon av hypoteserna vara falsk, och argumentet är således giltigt.

Svar: Argumentet är giltigt, enligt motsägelsebeviset ovan.

3. (a) *Alternativ 1:* Tre siffror skall väljas ut bland sex möjliga, vilket kan ske på $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = 20$ olika sätt.

Alternativ 2: Första siffran kan väljas på sex sätt, andra siffran på fem sätt, och tredje siffran på fyra sätt. Eftersom ordningen inte är intressant får vi dividera med 3!, och får $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ sätt.

Svar: Det finns 20 sådana utfall.

(b) *Alternativ 1:* Här skall en siffra förekomma två gånger och en siffra endast en gång. Vi kan välja siffran som skall förekomma två gånger på sex olika sätt, och sedan den ensamma siffran på fem sätt. Detta ger $6 \cdot 5 = 30$ utfall.

Alternativ 2: Vi kan välja ut två siffror bland sex möjliga på $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = 15$ olika sätt, och därefter finns två möjligheter för att välja vilken av dessa som skall vara ”dubbelsiffran”. Detta ger $15 \cdot 2 = 30$ olika utfall.

Svar: Det finns 30 sådana utfall.

(c) Följande varianter finns:

- De tre tärningarna visar olika, vilket enligt (a) ger 20 olika utfall.
- Precis två av tärningarna visar lika, vilket enligt (b) ger 30 olika utfall.
- Alla tre tärningarna visar samma, vilket ger 6 olika utfall.

Summerar vi ovanstående får vi $20 + 30 + 6 = 56$ utfall.

Svar: Det finns totalt 56 olika utfall.

4. Låt x beteckna antalet hasselnötter Benjamin skulle gömma. Av informationen i uppgiften kan vi ställa upp kongruenserna

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 8 \\ x \equiv 2 \mod 11. \end{cases}$$

Eftersom $\mathrm{sgd}(8, 11) = 1$ utlovar kinesiska restsatsen att detta system av kongruenser har lösningar, och vi söker den minsta positiva lösningen. Det finns flera sätt att bestämma denna.

Alternativ 1: Vi finner först en godtycklig lösning till den diofantiska ekvationen $8u + 11v = 1$, och får sedan utifrån denna lösningarna till kongruenssystemet ovan som $x = 2 \cdot 8u + 1 \cdot 11v + 88k$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Euklides algoritm ger oss

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0, \end{aligned}$$

och genom att gå baklänges i dessa beräkningar får vi att

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1 \cdot (8 - 2 \cdot 3) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot (11 - 1 \cdot 8) - 1 \cdot 8 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8, \end{aligned}$$

och vi kan alltså ta $u = -4$ och $v = 3$. Med lösningsformeln ovan får vi för något heltal k att $x = 2 \cdot 8 \cdot (-4) + 1 \cdot 11 \cdot 3 + 88k = -64 + 33 + 88k = -31 + 88k$. Minsta positiva lösningen blir alltså $x = -31 + 88 = 57$.

Alternativ 2: Av första kongruensen, $x \equiv 1 \mod 8$, får vi att $x = 1 + 8s$ för något heltal s. Insättning av detta i den andra kongruensen ger

$$1 + 8s \equiv 2 \mod 11 \quad \Leftrightarrow \quad 8s \equiv 1 \mod 11 \quad \Leftrightarrow \quad 8s = 1 + 11t,$$

där även t är ett heltal. Vi löser den diofantiska ekvationen $8s + 11(-t) = 1$ genom att använda Euklides algoritm och sedan gå baklänges i densamma. Vi får

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0, \end{aligned}$$

och därefter

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1 \cdot (8 - 2 \cdot 3) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot (11 - 1 \cdot 8) - 1 \cdot 8 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8. \end{aligned}$$

Samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $8s + 11(-t) = 1$ ges av

$$\begin{cases} s = -4 - 11k \\ -t = 3 + 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -4 - 11k \\ t = -3 - 8k \end{cases}$$

för något heltal k.

Vi kom tidigare fram till att $x = 1 + 8s$, och detta ger oss nu

$$x = 1 + 8s = 1 + 8(-4 - 11k) = 1 - 32 - 88k = -31 - 88k,$$

och minsta positiva lösningen ges då $k = -1$ och är $x = -31 + 88 = 57$.

Svar: Minsta antalet hasselnötter som ekorren Benjamin kan ha haft inför vintern är $x = 57$.[1]

[1] Om detta föranleder oro kan det nämnas här att ekorrar äter även annat (huvudsakligen granfrön), och att Benjamin sågs nöjd, välgödd, och vital senast 2018-01-08.

5. (a) Det finns sex olika bostäver, och vi kan välja ut fem av dessa på $\binom{6}{5} = 6$ sätt. För varje sådan uppsättning av fem bokstäver kan vi bilda $5! = 120$ olika ”ord”. Sammanlagt kan vi bilda $6 \cdot 120 = 720$ olika ”ord”.

Svar: Vi kan bilda 720 olika ”ord”.

(b) Eftersom bokstäverna vi väljer att använda måste förekomma minst två gånger måste en bokstav förekomma tre gånger. Det är bara F som finns i minst tre exemplar, och det finns tre andra bokstäver (A, I, och R) som förekommer i två exemplar. För var och en av dessa kan vi bilda $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$ olika ”ord”. Sammantaget finns det alltså 30 olika ”ord”.

Svar: Det kan bildas 30 olika ”ord”.

(c) Om alla fem bokstäverna är olika finns det enligt (a) 720 olika ”ord”.

Om två av de fem bokstäverna är lika och de övriga tre är olika finns det 2400 olika ”ord”. Detta fås genom att välja bokstaven som skall förekomma två gånger (detta kan ske på fyra sätt), och sedan välja ut de tre enstaka bokstäverna (detta kan ske på $\binom{5}{3} = 10$ sätt). Eftersom två bokstäver är lika blir det $4 \cdot 10 \cdot \frac{5!}{2!} = 2400$ varianter.

Om två olika bokstäver förekommer dubbelt (och en bokstav endast en gång) finns det $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \frac{5!}{2!\,2!} = 6 \cdot 4 \cdot 30 = 720$ ”ord”.

Om tre bokstäver är lika och resten är olika finns det $\binom{5}{2} \cdot \frac{5!}{3!} = 10 \cdot 20 = 200$ möjligheter.

Om en bokstav, F, förekommer tre gånger och en annan bokstav två gånger finns det enligt (b) 30 varianter.

Om F förekommer fyra gånger finns det $5 \cdot \frac{5!}{4!} = 25$ varianter.

Lägger vi samman möjligheterna får vi $720+2400+720+200+30+25 = 4095$.

Svar: Det kan bildas 4095 olika ”ord” av bokstäverna.

6. (a) *Alternativ 1:* Eftersom $\mathbb{Z}_5$ bara innehåller fem element kan vi lätt testa att sätta exempelvis b till vart och ett av de fem elementen och se vad som händer. Vi får

$$\begin{cases} a \star [0] = a[0] + [3]a - [2][0] - [1] = [3]a - [1] \\ a \star [1] = a[1] + [3]a - [2][1] - [1] = [4]a - [3] \\ a \star [2] = a[2] + [3]a - [2][2] - [1] = [0] \\ a \star [3] = a[3] + [3]a - [2][3] - [1] = a - [2] \\ a \star [4] = a[4] + [3]a - [2][4] - [1] = [2]a - [4] \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} [0] \star a = [0]a + [3][0] - [2]a - [1] = [3]a - [1] \\ [1] \star a = [1]a + [3][1] - [2]a - [1] = [4]a - [3] \\ [2] \star a = [2]a + [3][2] - [2]a - [1] = [0] \\ [3] \star a = [3]a + [3][3] - [2]a - [1] = a - [2] \\ [4] \star a = [4]a + [3][4] - [2]a - [1] = [2]a - [4], \end{cases}$$

och vi ser att operatorn är kommutativ.

Alternativ 2: Eftersom $a \star b = ab + [3]a - [2]b - [1] = ab + [3]a + [3]b - [1]$ ser vi att $a \star b = b \star a$ (a och b uppträder *symmetriskt* i uttrycket).

Svar: Ja, operatorn är kommutativ.

(b) Använde vi oss av första alternativet i (a) kan vi utnyttja beräkningarna därifrån. I annat fall får vi utföra dem här. Hursomhelst får vi att

$$\begin{cases} a \star [0] = [3]a - [1] \\ a \star [1] = [4]a - [3] \\ a \star [2] = [0] \\ a \star [3] = a - [2] \\ a \star [4] = [2]a - [4], \end{cases}$$

och det finns alltså inte något $e \in \mathbb{Z}_5$ sådant att $a \star e = e \star a = a$ för alla a.

Svar: Nej, operatorn $\star$ saknar identitet.

(c) Eftersom $\star$ inte har någon identitet kan heller inget element ha någon invers med avseende på $\star$.

Svar: Nej, [2] (och övriga element i $\mathbb{Z}_5$) saknar invers med avseende på $\star$.

7. (a) Grafen G är sammanhängande och saknar cykler, och är alltså ett träd.

Svar: Ja, grafen G är ett träd.

(b) Vi kan dela upp nodmängden V i två disjunkta delmängder, där ingen av grafens kanter går *inom* respektive mängd, enligt $V = \{A, C\} \cup \{B, D, E\}$. Grafen G är alltså bipartit.

Svar: Ja, G är en bipartit graf.

(c) Grafen G är sammanhängande, och enligt en känd sats innehåller en sammanhängande graf en Eulerväg precis då högst två noder har udda gradtal. I grafen G har fyra noder udda gradtal (alla utom B), så G innehåller inte någon Eulerväg.

Svar: Nej, G innehåller inte någon Eulerväg.

(d) Med hjälp av samma kända sats som omtalades i (c) inser vi att kanten måste gå till A eller D för att H skall innehålla en Eulerväg, eftersom det då kommer att finnas precis två noder med udda gradtal (dvs C och den av A och D som vi inte drar en kant till).

Svar: Kanten kan dras till A eller D.

8. (a) Primtalsfaktorisering ger $500 = 2^2 \cdot 5^3$, och vi kan nu beräkna

$$\Phi(500) = 2^{2-1}(2-1)5^{3-1}(5-1) = 2 \cdot 1 \cdot 25 \cdot 4 = 200.$$

Svar: $\Phi(500) = 200$.

(b) Med hjälp av primtalsfaktoriseringen i (a) ser vi att $\mathrm{sgd}(500, 7) = 1$ (alternativt kan vi använda Euklides algoritm för att upptäcka detta). Eftersom $\mathrm{sgd}(500, 7) = 1$ försäkrar Eulers sats att

$$7^{\Phi(500)} \equiv 1 \mod 500, \quad \text{dvs} \quad 7^{200} \equiv 1 \mod 500.$$

Enligt divisionsalgoritmen är $1602 = 8 \cdot 200 + 2$, så vi får

$$x \equiv 7^{1602} \equiv 7^{8 \cdot 200 + 2} \equiv (7^{200})^8 \cdot 7^2 \equiv 1^8 \cdot 49 \equiv 49 \mod 500.$$

Detta betyder att $x = 49 + 500k$ för något $k \in \mathbb{Z}$, och det minsta positiva värdet är alltså $x = 49$.

Svar: Det sökta talet är $x = 49$.