1. Vi försöker hitta ett motsägelsebevis (eller ett motexempel). Vi antar därför att slutsatsen $q \vee t$ är falsk, dvs att $q = F$ och $t = F$, och ser om detta kan ske medan de tre hypoteserna är sanna.

Om tredje hypotesen skall vara sann måste $r = F$ och $p = F$, och vi har då tilldelat sanningsvärden till alla de ingående variablerna. Med dessa värden blir första hypotesen sann, men andra hypotesen blir falsk, dvs vi har fått en motsägelse. Argumentet är således giltigt.

Svar: Argumentet är giltigt, enligt motsägelsebeviset ovan.

2. **Svar:** Ja, det gäller, vilket kan visas på exempelvis genom ett induktionsbevis.

Vi inför predikatet

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

med universum $\mathbb{Z}_+$. Eftersom $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ är $P(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.

Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Antag därför att $P(n)$ är sann. Det gäller nu att

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

där de fagert gyllenglänsande deluttrycken ovan är lika enligt antagandet att $P(n)$ är sann. Vi har funnit att

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

är sann så fort $P(n)$ är sann, dvs induktionssteget $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ gäller.

Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

3. (a) Vi sätter ihop LINGON till en symbol $\mathcal{L}$. Förutom $\mathcal{L}$ har vi nu ett E, två I, ett L, och två S. Dessa sju symboler kan permuteras på 7! sätt, men vi måste sedan dela med $2! \cdot 2!$ på grund av de två dubbletterna.

Svar: Det finns $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$ olika sådana ”ord”.

(b) Det finns åtta olika bokstäver att välja på, varav fyra kan förekomma som dubletter. Om alla fyra bokstäverna väljs olika så finns $\binom{8}{4} = 70$ varianter, och dessa kan sedan bilda $4! \cdot 70 = 1680$ olika ”ord”. Om en bokstav förekommer dubbelt finns det $4\binom{7}{2} = 4 \cdot 21 = 84$ varianter, eftersom vi kan välja dubbletten på fyra sätt och skall därpå välja två olika bland de kvarvarande sju bokstäverna. I fallet med dubletter får vi $\frac{4!}{2!} \cdot 84 = 1008$ olika ”ord”, totalt alltså $1680 + 1008 = 2688$.

Svar: Det finns 2688 olika sådana ”ord”.

(c) Vi klumpar ihop E, G, och V till symbolen $\mathcal{E}$, som alltså kan betyda antingen GEV eller VEG. Förutom $\mathcal{E}$ finns det tio bokstäver, där dock vissa förekommer i fler än ett exemplar. Vi får totalt $2 \cdot \frac{11!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{11!}{4\cdot 3!} = 1663200$ olika ”ord”.

Svar: Det finns $\frac{11!}{4\cdot 3!}$ olika sådana ”ord” (behöver ej förenklas, felaktig förenkling ger inte avdrag).

4. Låt x beteckna antalet resenärer som åkte med tåget. Med informationen i uppgiften kan vi ställa upp kongruenserna

$$\begin{cases} x \equiv 11 \mod 57 \\ x \equiv \ \ 9 \mod 52. \end{cases}$$

Eftersom $\operatorname{sgd}(57, 52) = 1$ bedyrar kinesiska restsatsen att detta system av kongruenser har lösningar, och av uppgiftsformuleringen framgår att vi söker ett x sådant att $0 \leq x < 1000$ (om det nu finns). Det finns flera sätt att bestämma detta x.

Alternativ 1: Av första kongruensen, $x \equiv 11 \mod 57$, får vi att $x = 11 + 57s$ för något heltal s. Insättning av detta i den andra kongruensen ger

$$11 + 57s \equiv 9 \mod 52 \quad \Leftrightarrow \quad 5s \equiv -2 \equiv 50 \mod 52.$$

Eftersom $\operatorname{sgd}(5, 52) = 1$ blir $s \equiv 10 \mod 52$, dvs $s = 10+52t$ för något heltal t. Detta ger nu $x = 11 + 57s = 11 + 57(10 + 52t) = 581 + 57 \cdot 52t$, och vi ser att den sökta lösningen är $x = 581$.

Alternativ 2: Vi finner först en godtycklig lösning till den diofantiska ekvationen $57u + 52v = 1$, och får sedan utifrån denna lösningarna till kongruenssystemet ovan som $x = 9 \cdot 57u + 11 \cdot 52v + 57 \cdot 52k$ för $k \in \mathbb{Z}$.

Euklides algoritm ger oss

$$\begin{aligned} 57 &= 1 \cdot 52 + 5 \\ 52 &= 10 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0, \end{aligned}$$

och genom att gå baklänges i dessa beräkningar får vi att

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - 2 \cdot (52 - 10 \cdot 5) = 21 \cdot 5 - 2 \cdot 52 \\ &= 21 \cdot (57 - 1 \cdot 52) - 2 \cdot 52 = 21 \cdot 57 - 23 \cdot 52, \end{aligned}$$

och vi kan alltså ta $u = 21$ och $v = -23$. Med lösningsformeln ovan får vi för något heltal k att

$$\begin{aligned} x &= 9 \cdot 57 \cdot 21 + 11 \cdot 52 \cdot (-23) + 57 \cdot 52k = \\ &= 10773 - 13156 + 2964k = -2383 + 2964k. \end{aligned}$$

För $k = 1$ får vi $x = -2383+2964 = 581$, som är enda lösningen till problemet.

Svar: Antalet passagerare är $x = 581$.

5. (a) Eftersom $a \lightning b = (2a+1)b - a(b-1) = ab + a + b$ gäller det att $(a \lightning b) - (b \lightning a)$ förenklas till noll, dvs $(a \lightning b) = (b \lightning a)$, och $\lightning$ är alltså en kommutativ operator.

Svar: Ja, $\lightning$ är kommutativ.

(b) Vi söker ett element e sådant att $a \lightning e = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$ (vi behöver inte undersöka $e \lightning a = a$, eftersom vi vet från (a) att operatorn är kommutativ). Vi får

$$a \lightning e = a \Leftrightarrow ae + a + e = a \Leftrightarrow (a+1)e = 0,$$

och eftersom detta skall gälla för alla a måste $e = 0$.

Svar: Identiteten med avseende på $\lightning$ är $e = 0$.

(c) Om $a \lightning b = e$, där $e = 0$ är identiteten, så är b invers till a med avseende på $\lightning$. Vi får

$$a \lightning b = 0 \Leftrightarrow ab + a + b = 0 \Leftrightarrow (a+1)b + a = 0.$$

Om $a \neq -1$ blir inversen $b = -\frac{a}{a+1}$, och om $a = -1$ saknar a invers.

Svar: Ja, alla $a \neq -1$ har en invers med avseende på $\lightning$. Inversen till a ges (då den existerar) av $b = -\frac{a}{a+1}$.

6. (a) Primtalsfaktorisering ger $432 = 2^4 \cdot 3^3$, och vi kan nu beräkna

$$\Phi(432) = 2^{4-1}(2-1)3^{3-1}(3-1) = 8 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 = 144.$$

Svar: $\Phi(432) = 144$.

(b) Med hjälp av primtalsfaktoriseringen i (a) ser vi att $\mathrm{sgd}(432, 5) = 1$ (alternativt kan vi använda Euklides algoritm för att avslöja detta). Eftersom $\mathrm{sgd}(432, 5) = 1$ ger nu Eulers sats att

$$5^{\Phi(432)} \equiv 1 \mod 432, \quad \text{dvs} \quad 5^{144} \equiv 1 \mod 432.$$

Enligt divisionsalgoritmen är $723 = 5 \cdot 144 + 3$, så vi får

$$x \equiv 5^{723} \equiv 5^{5 \cdot 144 + 3} \equiv (5^{144})^5 \cdot 5^3 \equiv 1^5 \cdot 125 \equiv 125 \mod 432.$$

Detta betyder att $x = 125 + 432k$ där $k \in \mathbb{Z}$.

Svar: Alla sådana tal ges av $x = 125 + 432k$ där $k \in \mathbb{Z}$.

7. (a) **Svar:** Nej, exempelvis gäller både $4\mathcal{R}3$ $(4^2 - 3^2 = 7)$ och $3\mathcal{R}2$ $(3^2 - 2^2 = 5)$, men inte $4\mathcal{R}2$ $(4^2 - 2^2 = 12)$.

(b) Eftersom högst en av $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}a$ kan vara sann är $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a)$ alltid falsk, så det gäller att $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$, och $\mathcal{R}$ är således antisymmetrisk.

Svar: Ja, $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk.

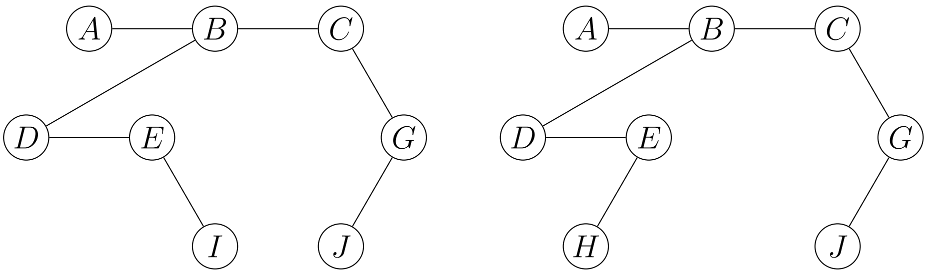
(c) Om $a\mathcal{R}b$ så är $a^2 - b^2 = p \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = p$ för något primtal p. Ett primtal p har endast två positiva faktorer (1 och p), och eftersom $p > 1$ måste $a + b = p$ och $a - b = 1$.

Svar: Ja, om $a\mathcal{R}b$ så är även $a + b$ ett primtal.

8. (a) Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att M skall ha en Eulercykel är att samtliga noder i M skall ha ett jämnt gradtal, vilket inte stämmer för A och C. Genom att lägga till en kant mellan A och C får alla noder ett jämnt gradtal, och det kommer då finnas en Eulercykel.

Svar: Nej, M har ingen Eulercykel. Genom att lägga till en kant mellan A och C får grafen dock en Eulercykel.

(b) Ett träd är en sammanhängande graf som saknar cykler. Frågan är alltså om det går att ta bort två noder, och alla kanter som ansluter till dem, på ett sådant sätt att den nya grafen är sammanhängande men saknar cykler. Enda möjligheten till detta är att eliminera F och antingen H eller I, vilket ger de två möjliga träden nedan:



Svar: Ja, om vi plockar bort F och antingen H eller I blir den inducerade delgrafen ett träd med åtta noder.