Mårten Wadenbäck

# Kombinatorik

Kombinatorik handlar till stor del om att besvara frågor av typen "Hur många [...] ?".

En grundläggande princip inom kombinatorik är additionsprincipen:

> Antalet sätt att göra ett val mellan $m$ varianter av $A$ och $n$ varianter av $B$ är $m+n$.

Additionsprincipen går förstås att utöka till fler "kategorier" än bara $A$ och $B$.

Exempel: Aladdinasken innehåller 6 sorters mörka praliner, 6 sorters ljusa praliner, och en sort med vit choklad (pärlnougat). Vi kan alltså välja en pralin på $6+6+1=13$ sätt.

Multiplikationsprincipen är en annan grundläggande princip:

Antalet sätt att välja först en av $m$ varianter av $A$ och sedan $n$ varianter av $B$ är $mn$.

Även detta kan utökas till fler "kategorier." Om $A_1, \ldots, A_k$ är mängder ur vilka vi skall välja vardera ett element beskrivs ju varje sådant val av ett element i produktmängden $A_1 \times \cdots \times A_k$, och vi har tidigare sett att $|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.

Exempel: På en plantskola finns 51 olika sorters stengodskrukor och 68 olika sorters krukväxter. Att välja en kruka och en krukväxt kan då göras på $51 \cdot 68 = 3468$ olika sätt.

Vi har tidigare sett att antalet ordningar att ställa in fem böcker på ett hyllplan är $5! = 120$ sätt, där vi lät $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

I allmänhet får vi en <u>permutation</u> av $n$ objekt när de listas i en viss ordning, och antalet permutationer av $n$ element är alltså $n!$.

Ofta listas inte alla $n$ elementen, utan bara några.

Definition: Med en <u>permutation</u> av $r$ element ur en mängd $A$ menas en uppräkning av $r$ element från $A$ i en viss ordning.

Om $|A|=n$, hur många permutationer av $r$ element ur $A$ finns det? Vi använder multiplikationsprincipen och väljer ett element i taget. Det blir

$$\underset{x_1}{n}\,\underset{x_2}{(n-1)}\cdots\underset{x_r}{(n-r+1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

sätt. Om $r=0$ får vi $\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$, och det är rimligt eftersom det bara finns ett sätt att rad upp noll element (låt bli).

Exempel: Hur många "ord" av längd tre kan bildas ur bokstäverna i SYLTBURK?

Vi söker antalet permutationer av tre av de åtta bokstäverna, och detta är $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Exempel: Hur många "ord" av längd sex kan bildas ur bokstäverna i SALLAD?

Ett problem här är att vi har två likvärdiga A och två likvärdiga L, så vissa permutationer kommer att ge samma ord. Om vi till en början skiljer på alla bokstäver får vi $6! = 720$ olika "ord" av "bokstäverna" i $SA_1L_1L_2A_2D$. Den inbördes ordningen mellan $A_1$ och $A_2$ kan göras på $2! = 2$ sätt, så varje "ord" kommer att räknas dubbelt om vi inte skiljer på $A_1$ och $A_2$. Antalet "ord" som bildas ur $SAL_1L_2AD$ är alltså $\frac{6!}{2!} = 360$. Samma resonemang för L, och $L_2$ ger att antalet "ord" som kan bildas

ur SALLAD är $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Exempel: I hur många permutationer av bokstäverna

i KATT står K och A inte bredvid varandra?

Enligt principen ovan finns det totalt $\frac{4!}{2!} = 12$

olika "ord" utan det extra kravet på K och A.

Från 12 kan vi dra bort antalet "ord" där

K och A faktiskt står intill varandra.

Klumpar vi ihop K och A till en symbol

$\boxed{KA}$ finns det $\frac{3!}{2!} = 3$ "ord" att bilda av

$\boxed{KA}TT$, och för varje sådant kan $\boxed{KA}$ betyda

antingen KA eller AK. I $2 \cdot 3 = 6$ "ord" står

K och A bredvid varandra, och då blir det

$12 - 6 = 6$ "ord" där de inte står bredvid

varandra.

Om vi inte är intresserade av ordningen som vi radar upp elementen i får vi en <u>kombination.</u>

Definition: Låt $A$ vara en mängd med $n$ element och låt $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. En kombination av $r$ element ur $A$ är en delmängd av $A$ med $r$ element.

Hur många kombinationer av $r$ element finns det om $A$ innehåller $n$ element? Antalet permutationer av $r$ element ur $A$ är sedan tidigare $\frac{n!}{(n-r)!}$, men här räknas de $r!$ olika ordningarna roll, till skillnad för fallet med kombinationer. Antalet kombinationer måste då bli $\frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Notation: Vi inför symbolen $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ (binomialkoefficient).

Exempel: Om $A$ är en mängd med $n$ element vet vi att $|P(A)| = 2^n$. I termer av binomialkoefficienter har vi då $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$.

Exempel: Om någon paxat alla de mörka pralinerna i Aladdinasken kan vi välja ut tre olika praliner på $\binom{6+1}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$ sätt.

Ett annat sätt att se detta är följande:

- Väljer vi pärlnougaten finns det $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ sätt att välja de två ljusa på,
- väljer vi inte pärlnougaten finns det $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ sätt att välja de tre ljusa på.

Totalt $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 35$ sätt.

Sats: Om $n$ och $r$ är heltal sådana att $n \geq 1$ och $0 \leq r \leq n-1$ gäller

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}.$$

Detta ger upphov till <u>Pascals triangel</u>:

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
n & & & & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Sats (Binomialsatsen): Antag att a och b är reella tal och n ett positivt heltal. Då är

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

Bevis: Vi skall multiplicera ihop de n parenteserna $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. Vi kommer att få en summa av termer av typen $a^r b^{n-r}$, och frågan är bara vilka koefficienter som uppstår. Termen $a^r b^{n-r}$ uppkommer ju då vi väljer a ur r parenteser och b ur de $n-r$ övriga, så vi kommer att få $a^r b^{n-r}$ precis $\binom{n}{r}$ gånger.

Exempel: Om vi utvecklar $(2x+\frac{1}{x})^5$ med binomialsatsen får vi

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}\cdot\frac{1}{x^5} + \binom{5}{1}\cdot 2x\cdot\frac{1}{x^4} + \binom{5}{2}(2x)^2\frac{1}{x^3} + \binom{5}{3}(2x)^3\cdot\frac{1}{x^2} + \binom{5}{4}(2x)^4\cdot\frac{1}{x} + \binom{5}{5}\cdot(2x)^5 =$$

$$= \frac{1}{x^5} + \frac{5\cdot 2x}{x^4} + \frac{10\cdot 4x^2}{x^3} + \frac{10\cdot 8x^3}{x^2} + \frac{5\cdot 16x^4}{x} + 32x^5 =$$

$$= \frac{1}{x^5} + \frac{10}{x^3} + \frac{40}{x} + 80x + 80x^3 + 32x^5.$$