Problemblad 2

Problem 1. Låt A och B vara mängder med $|A| = m$ och $|B| = n$, där $m, n \in \mathbb{N}$. Om $f : A \to B$ är injektiv, hur förhåller sig då m och n? Om istället $f : B \to A$ är surjektiv, hur förhåller sig då m och n? Om $f : B \to A$ är bijektiv, hur förhåller sig då m och n?

Betrakta funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ given av

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases} \tag{1}$$

Är f injektiv? Är f surjektiv? Är f bijektiv? Är detta förenligt med första delen av uppgiften?

(När vi har att göra med oändligheter, exempelvis i form av oändliga mängder, kan det hända saker som vi upplever som paradoxala. Skall vi tala om oändligheter är det viktigt att vi först faktiskt preciserar vad vi menar och sedan kritiskt resonerar utifrån det, annars lurar vi nästan säkert oss själva!)

Problem 2. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ vara en mängd. Vi har behandlat de fyra egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri*, och *transitivitet* för relationer på en mängd. För var och en av dessa egenskaper, finns det någon relation på A som har just den egenskapen men ingen av de tre övriga? Ge (minst) ett konkret exempel för var och en av egenskaperna, eller förklara i förekommande fall varför det inte går.

Problem 3. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara två funktioner. Om både f och g är injektiva, måste då sammansättningen $g \circ f$ vara injektiv? Om sammansättningen $g \circ f$ är injektiv, måste då f respektive g vara injektiva? Ge antingen bevis eller konkreta motexempel.