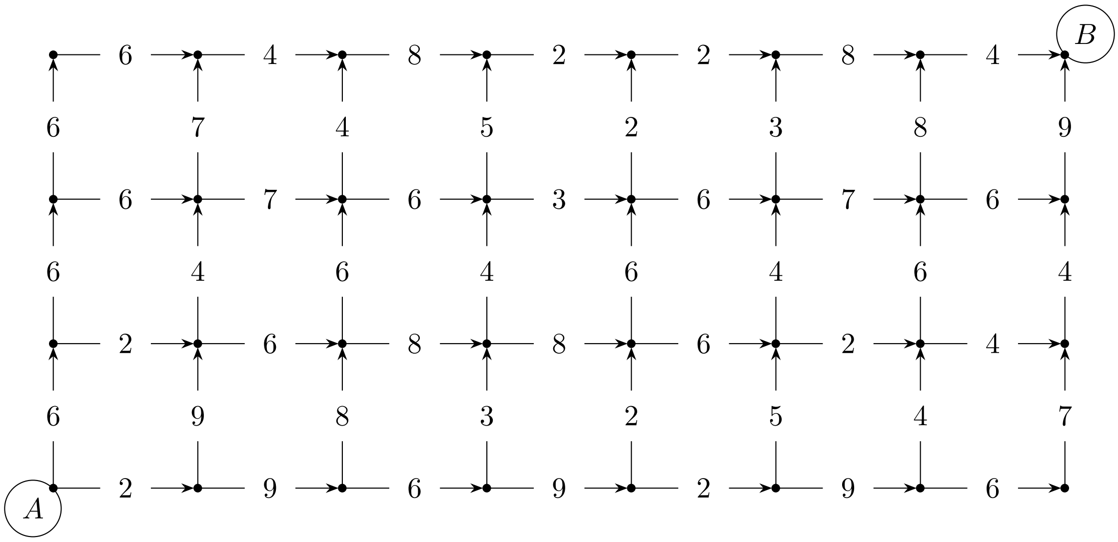
Problemblad 3

Problem 1. Låt en talföljd definieras enligt

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(n) = f(n-1) + 2n + 1, \quad n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Beräkna några tal i följden, och gissa utifrån dessa en direkt (alltså inte rekursiv) formel för $f(n)$. Använd induktion för att bevisa denna formel.

Problem 2. Om vi skall gå från A till B i Figur 1, vilken är då största respektive minsta möjliga summan av alla siffror vi passerar längs vägen? Om vi bortser helt från siffrorna, på hur många olika sätt kan vi gå från A till B?



Figur 1: Vi skall gå från A till B, och får endast färdas i pilarnas riktning.

Problem 3. Om $A = \{5, -1, 3\}$ är ju

$$\sum_{a \in A} a = 5 + (-1) + 3 = 7 \quad \text{och} \quad \prod_{a \in A} a = 5 \cdot (-1) \cdot 3 = -15, \tag{2}$$

dvs vi har bara skrivit ut elementen i A på en rad och satt in rätt operator ($+$ för summan $\sum$ och $\cdot$ för produkten $\prod$) mellan elementen. Om vi på detta sätt skulle införa en symbol $\mathop{\mathrm{M}}$ för upprepad subtraktion och en symbol Δ för upprepad division, vilka värden skulle då

$$\mathop{\mathrm{M}}_{a \in A} a \quad \text{respektive} \quad \mathop{\Delta}_{a \in A} a \tag{3}$$

kunna anta? Resonera kring varför det normalt inte definieras symboler motsvarande $\mathop{\mathrm{M}}$ och Δ för upprepad subtraktion eller division. Är det så att det finns några problem med $\mathop{\mathrm{M}}$ och Δ, eller är det helt enkelt så att $\sum$ och $\prod$ redan täcker behoven?