Problemblad 4

Problem 1. Låt x och y vara två heltal (där inte båda är noll). Största gemensamma delaren till x och y, som vi betecknar $\mathrm{sgd}(x, y)$, definierades som det tal d som uppfyller de två villkoren

(i) $d|x \wedge d|y$,

(ii) $c|x \wedge c|y \Rightarrow c \leq d$.

För varje val av talen x och y definierar de ”omvända” villkoren jämfört med $\mathrm{sgd}(x, y)$ ett entydigt tal $m > 0$ som vi kan beteckna med $m = f(x, y)$. Med de ”omvända” villkoren menas här

(i′) $x|m \wedge y|m$,

(ii′) $x|n \wedge y|n \Rightarrow n \geq m$.

Vad blir $\mathrm{sgd}(6, 4)$, $f(6, 4)$, respektive $\mathrm{sgd}(6, 4) \cdot f(6, 4)$?

Vad blir $\mathrm{sgd}(10, 5)$, $f(10, 5)$, respektive $\mathrm{sgd}(10, 5) \cdot f(10, 5)$?

Vad blir $\mathrm{sgd}(27, 21)$, $f(27, 21)$, respektive $\mathrm{sgd}(27, 21) \cdot f(27, 21)$?

Vad tycks $\mathrm{sgd}(x, y) \cdot f(x, y)$ bli i allmänhet? Varför?

Problem 2. Ur definitionen av kongruens följer att om $n \geq 2$ och x är heltal så gäller $n|x \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{n}$. Detta kan användas för att hitta diverse delbarhetsregler!

Det är välkänt att ett heltal x, skrivet i det decimala talsystemet, är delbart med tre precis då dess siffersumma är delbar med tre.[1] Om vi skriver x i det binära talsystemet istället (se Problemblad 1, Problem 3) fungerar inte detta kriterium: trots att $18 = 10010_2$ är

$$\text{siffersumma}(10010_2) = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2 \qquad \text{(ej delbar med tre).} \tag{3}$$

Hitta ett kriterium för när ett heltal x är delbart med tre, som gäller när x är skrivet i det binära talsystemet. (Missa inte fotnoten!)

[1] Detta kan vi se på följande sätt: Låt a_k beteckna siffra nummer k (börja räkna på noll) från höger i talet. Om x är ett tal med $n + 1$ siffror är

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \tag{1}$$

och eftersom $10 \equiv 1 \pmod{3}$ blir

$$x \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod{3}. \tag{2}$$