MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2012-12-22.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Peter Helgesson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. (a) Bestäm alla positiva delare till 450.

   (b) Beräkna $\mathrm{sgd}(301, 84)$ och bestäm $x, y \in \mathbb{Z}$ sådana att
$$301x + 84y = \mathrm{sgd}(301, 84).$$
(6p)

2. Vi definierar (som vanligt) Fibonacci-talen enligt följande:
$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(1) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$
Visa att dessa satisfierar likheten
$$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n),$$
för alla naturliga tal n. (6p)

3. (a) De 14 personerna i inrikesutskottet ska välja en intern arbetsgrupp som ska bestå av 5 personer. Herr V och Fru M kommer inte alls överens så dessa kan inte båda vara med i gruppen. I övrigt kan gruppen sättas ihop hur som helst. Hur många möjliga grupper finns det?

   (b) Generalisera föregående uppgift till fallet med n personer i utskottet och k personer i arbetsgruppen där n och k är godtyckliga heltal med $1 < k < n$. (8p)

4. Sätt $M = \{1, 2, 5, 11, 13, 22, 26, 143, 286\}$ och betrakta den partiella ordningen 'delar' på M, dvs. a är relaterad till b om och endast om det finns heltal k sådant att $b = ka$. Rita Hasse-diagrammet av denna partiella ordning på M och bestäm alla minimala, maximala, minsta respektive största element. (8p)

Var god vänd!

5. Betrakta utsagan: 'Alla naturliga tal har egenskapen att om de inte är delbara med 5 så är deras kvadrat kongruent med 1 modulo 5.'

   (a) Bryt ned utsagan så långt det går genom att införa predikat och använda konnektiv och kvantorer.

   (b) Negera utsagan och förenkla den så att negationer endast finns direkt på predikat.

   (c) Avgör om utsagan eller dess negation är sann och bevisa detta. (7p)

6. (a) Beräkna Eulers phifunktion av 132, d v s $\Phi(132)$.

   (b) Bestäm det minsta positiva talet m sådant att

$$m \equiv 1121^{1121} \pmod{132}.$$

   Observera att kalkylen blir enkel om man använder sig av lämplig sats. Tänk på att motivera din kalkyl noggrant. (7p)

7. Låt $\star$ vara en binär operator på en mängd G. Man säger att G med operatorn $\star$ är en *grupp* om följande tre villkor är uppfyllda:

   - Operatorn $\star$ är associativ på G.
   - Det finns en identitet $e \in G$ för $\star$.
   - Varje element i G har en invers m a p $\star$ i G.

   Vidare säger man att en delmängd H till G är en *delgrupp* till G om H också är en grupp med operatorn $\star$. Speciellt måste då identiteten e ligga i H.

   Låt nu H vara en delgrupp i en grupp G med en operator $\star$. Identiteten betecknas med e och inversen av a skrivs a^{-1}. Vi definierar nu en relation $\mathcal{R}$ på G genom att säga att $a\mathcal{R}b$ om och endast om $a \star b^{-1} \in H$.

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Motivera att $\mathbb{Z}$ med addition är en grupp och att $H_N = \{k \in \mathbb{Z} : N \mid k\}$ är en delgrupp till $\mathbb{Z}$ om N är ett positivt heltal.

   (c) Vad är relationen $\mathcal{R}$ ovan i specialfallet $G = \mathbb{Z}$ (med addition) och $H = H_N$? (8p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 16 januari. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle under vecka 5. Tid meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 9:00 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.