MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-12-20.
Lösningar

1. Argumentet är giltigt och en motivering kan se ut så här.

   Enligt den andra premissen är antingen s sann eller r falsk. Vi antar först att s är sann och tar sedan fallet då r är falsk.

   Om s är sann så är enligt den fjärde premissen då q sann. Men då är $\neg p \vee q$ sann och då ger den första premissen att v är sann.

   Antag nu istället r falsk. Då ger den tredje premissen att p är falsk. Men då är $\neg p \vee q$ sann och då ger återigen den första premissen att v är sann.

   Därmed har vi visat att argumentet är giltigt.

2. (a) Förutom de givna siffrorna ska man välja ytterligare en siffra bland de övriga 8 vilket kan göras på 8 sätt om man för tillfället bortser ifrån att första siffran inte får vara en nolla. Man har sedan 6 siffror som ska permuteras med en triplett och en dubblett. Det ger

   $$8 \cdot \frac{6!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 480$$

   tal. Från detta ska vi subtrahera antalet tal som startar med en nolla. Dessa består av 5 övriga siffror med återigen en triplett och en dubblet. Det ger

   $$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

   och alltså blir det $480 - 10 = 470$ sexsiffriga tal som innehåller exakt 3 tvåor och 2 femmor.

   (b) Tal delbara med 5 är som bekant de som slutar på en femma eller en nolla. Om vi först tar de som slutar på en nolla så blir det lika många som de som startar på en nolla vilket vi fick till 10 i första deluppgiften. För de som slutar på en femma blir kalkylen liknande den i a), med skillnaden att vi nu inte har en dubblett utan bara en triplett för de som ska permuteras. Om man bortser från att första inte får vara en nolla får vi nu

   $$8 \cdot \frac{5!}{3!} = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160.$$

   De som börjar på en nolla blir

   $$\frac{4!}{3!} = 4$$

   så totalt $160 - 4 = 156$ som slutar på en femma. Tillsammans blir det alltså 166 av talen som är delbara med 5.

3. Vi gör total induktion över n.

   Vi behöver 3 basfall eftersom rekursionen har 3 startvärden. Eftersom vi har $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ och $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ respektive $2^3 = 8$ så stämmer olikheten för $n = 1, 2, 3$.

Antag nu att olikheten gäller för alla $n \leq k$ för något $k \geq 3$. Då får vi för $n = k+1$ att

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + T_{k-1} + T_{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \\ &= 2^{k-2}(2^2 + 2 + 1) < 2^{k-2} \cdot 8 = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Alltså gäller olikheten för $n = k+1$.

Med stöd av basfallen och induktionssteget ovan så ger induktionsprincipen att olikheten gäller för alla $n \geq 1$.

4. Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 97 &= 1 \cdot 54 + 43 \\ 54 &= 1 \cdot 43 + 11 \\ 43 &= 3 \cdot 11 + 10 \\ 11 &= 1 \cdot 10 + 1 \end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{sgd}(97, 54) = 1$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 1 \cdot 10 = 11 - (43 - 3 \cdot 11) = 4 \cdot 11 - 1 \cdot 43 \\ &= 4(54 - 1 \cdot 43) - 1 \cdot 43 = 4 \cdot 54 - 5 \cdot 43 \\ &= 4 \cdot 54 - 5(97 - 54) = 9 \cdot 54 - 5 \cdot 97. \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = -5 \cdot 6 = -30$ och $y = 9 \cdot 6 = 54$. Alla lösningar ges därmed av $x = -30 + 54n$ och $y = 54 - 97n$ med $n \in \mathbb{Z}$.

5. Vi vet från känd sats att det finns en Euler-cykel om och endast om graden av alla noder är jämn, samt att det finns en Euler-väg om det finns *högst* 2 noder med udda grad.

   (a) För K_n har vi att graden hos varje nod är $n-1$. Alltså finns det en Euler-cykel om och endast om n är udda. Om $n = 2$ finns det 2 noder med udda grad, så för $n = 2$ finns det en Euler-väg. För övriga med jämnt antal noder finns det inte heller någon Euler-väg.

   För $K_{1,n}$ har vi att graden hos alla noder utom den "i mitten" är 1 samt för den "i mitten" är den n. Det betyder att det aldrig finns någon Euler-cykel samt att det finns en Euler-väg bara då $n = 1$ och $n = 2$.

   (b) Antag först att $n \geq 4$ är jämnt och betrakta K_n. Eftersom alla noder har udda grad, så behöver vi minska graden med minst 1 för alla. Genom att dela upp noderna godtyckligt i $n/2$ par och ta bort kanten mellan varje par så får vi en delgraf med $n/2$ färre kanter som har en Euler-cykel och detta är förstås minsta möjliga eftersom vi måste minska den totala graden med (minst) n. Svaret är alltså $n/2$ för K_n med jämnt $n \geq 4$. Om $n = 2$ går det inte att få någon Euler-cykel. Betrakta nu $K_{1,n}$. Om $n = 1$ finns det ingen Euler-cykel. Om n är jämnt så kan vi analogt med K_n dela upp noderna i den stora gruppen i $n/2$ par och lägga till en kant mellan noderna i varje par. Då får vi jämn grad för samtliga noder. Om $n \geq 3$ är udda så är graden för noden i mitten udda, och eftersom den redan har en kant till alla andra noder, så måste vi ta bort en kant (om vi inte tillåter att det blir en multigraf). För att den ska vara sammanhängande och graden jämn för noden som förlorade sin enda kant, så måste vi dra en kant från den isolerade noden till två andra noder. Det finns nu $n-3$ noder kvar som fortfarande har grad 1. Vi delar upp dessa i $(n-3)/2$ par och drar en kant mellan varje par av noder. Då har varje nod jämn grad. Totalt får vi alltså att man ska lägga till $n/2$ kanter om n är jämnt respektive ta bort 1 och lägga till $2+(n-3)/2 = (n+1)/2$ kanter om n är udda.

6. (a) Vi kontrollerar att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
   Reflexiv: $a\mathcal{R}a \iff a = a \cdot 2^t$, $t \in \mathbb{Z}$ och det stämmer för $t = 0$.
   Symmetrisk: $a\mathcal{R}b \iff a = b \cdot 2^t \iff b = a \cdot 2^{-t} \iff b\mathcal{R}a$ eftersom $-t \in \mathbb{Z}$.
   Transitiv: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \iff a = b \cdot 2^t \wedge b = c \cdot 2^s$ där $s, t \in \mathbb{Z}$. Men det ger att $a = (c \cdot 2^s) \cdot 2^t = c \cdot 2^{s+t} \implies a\mathcal{R}c$ eftersom $s + t \in \mathbb{Z}$.
   Alltså är det en ekvivalensrelation.

   (b) Vi kollar först vad ekvivalensklasserna för de efterfrågade talen blir. Vi får

$$
\begin{aligned}
[1] &= \{b \in \mathbb{Z}_+ : 1 = b \cdot 2^t, t \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z}_+ : 2^{-t} = b, t \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z}_+ : b = 2^t, t \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

   och speciellt ser vi att $2 = 2^1 \in [1]$ så $[1] = [2]$. För 3 får vi

$$
\begin{aligned}
[3] &= \{b \in \mathbb{Z}_+ : 3 = b \cdot 2^t, t \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z}_+ : 3 \cdot 2^{-t} = b, t \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z}_+ : b = 3 \cdot 2^t, t \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$

   I allmänhet får vi nu att

$$[k] = \{b \in \mathbb{Z}_+ : b = k \cdot 2^t, t \in \mathbb{Z}\}.$$

   och den består helt enkelt av alla positiva heltal som skiljer sig från k med en faktor som är en potens av 2. T ex får vi $[1] = [2] = [4] = [8]$, $[3] = [6] = [12]$, $[5] = [10] = [20]$.

7. Eftersom $56 = 2^3 \cdot 7$ så gäller att $56 \mid k$ om och endast om $8 \mid k$ och $7 \mid k$. Vi delar därför upp i två olika steg.

   Visa först att $8 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$. Eftersom $\mathrm{sgd}(n, 14) = 1$ så är n udda och alltså kongruent med $1, 3, 5$ eller 7 modulo 8. Det ger att $n^2 \equiv 1 \pmod 8$ (testa alla fyra fallen). Vi får då

$$n^9 - n^6 - n^3 + 1 = (n^2)^4 \cdot n - (n^2)^3 - n^2 \cdot n + 1 \equiv n - 1 - n + 1 \equiv 0 \pmod 8.$$

   Visa nu att $7 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$. Eftersom $\mathrm{sgd}(n, 14) = 1$ så är $\mathrm{sgd}(n, 7) = 1$ så Eulers sats säger att $n^6 \equiv 1 \pmod 7$. Vi får då

$$n^9 - n^6 - n^3 + 1 = n^6 \cdot n^3 - n^6 - n^3 + 1 \equiv n^3 - 1 - n^3 + 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

   Alltså gäller att $8 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$ och $7 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$ och därmed att $56 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$.

8. Om vi beteckningar a:s entalssiffra med a_0 så är $b = (a - a_0)/10 - 2a_0$. Det ger att

$$2a + b = \frac{20a}{10} + \frac{a - a_0}{10} - \frac{20a_0}{10} = \frac{21a - 21a_0}{10} = 21\frac{a - a_0}{10} = 21(b + 2a_0).$$

Vi ser därmed att $2a + b$ är delbart med 21 och speciellt då delbart med 7. Vi har alltså att $2a + b = 7k$. Om $7 \mid a$ så kommer 7 dela $b = 7k + 2a$. Omvänt om $7 \mid b$ så kommer 7 dela $2a = 7k - b$ men då gäller att $7 \mid a$ eftersom $\mathrm{sgd}(2, 7) = 1$. Därmed är beviset klart.

Observera att resultatet ger en rekursiv algoritm att kontroller om ett tal är delbart med 7. Man upprepar proceduren att skapa b från a tills man har ett tal som man lätt kan avgöra om det är delbart med 7. Analog regel går att konstruera för godtyckligt primtal.