MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-12-20.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anna Persson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Avgör om följande argument är giltigt.

$$\begin{array}{r} (\neg p \vee q) \to v \\ \neg r \vee s \\ p \to r \\ s \to q \\ \hline v \end{array}$$

   Om det är giltigt så ge en motivering till det och om det inte är det så ge ett motexempel. (6p)

2. I den här uppgiften krävs det att man svarar med ett explicit heltal för full poäng.
   (a) Hur många positiva sexsiffriga heltal finns det som innehåller exakt 3 tvåor och 2 femmor?
   (b) Hur många av dessa är delbara med 5?
   (7p)

3. Vi definierar "Tribonacciföljden" på följande sätt

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{om } 1 \leq n \leq 3 \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, & \text{om } n \geq 4 \end{cases}$$

   Bevisa att $T_n < 2^n$ för alla positiva heltal n. (6p)

4. Lös den diofantiska ekvationen $97x + 54y = 6$, d v s bestäm *alla* heltalslösningar till ekvationen. (6p)

5. Låt K_n vara den fullständiga grafen på n noder (så att det finns kant mellan varje par av noder) och $K_{1,n}$ vara den fullständiga bipartita grafen med 1 nod i ena gruppen och n noder i den andra. Grafen $K_{1,n}$ kallas också för n-stjärnan, eftersom man kan lägga den ensamma noden i ena gruppen i mitten och låta kanterna vara strålar ut till de andra n noderna.
   (a) För vilka $n \geq 1$ har K_n respektive $K_{1,n}$ en Euler-cykel respektive Euler-väg?
   (b) I de fall då det inte finns Euler-cykel, vad är det minsta antal kanter man skulle behöva lägga till alternativt ta bort för att det ska finnas en Euler-cykel?
   (7p)

Var god vänd!

6. Vi definierar en relation på de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$ genom

$$a\mathcal{R}b \iff a = b \cdot 2^t \text{ för något } t \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Visa att detta är en ekvivalensrelation.

   (b) Beskriv ekvivalensklasserna så tydligt det går. Ange speciellt vilka tal som ingår i ekvivalensklasserna för 1, 2 och 3.

(6p)

7. Visa att $56 \mid n^9 - n^6 - n^3 + 1$ för alla heltal n sådana att $\text{sgd}(n, 14) = 1$. (6p)

8. Låt a vara ett positivt heltal och bilda ett nytt positivt heltal b genom att ta bort entalssiffran från a och sedan subtrahera 2 gånger entalssiffran i a. T ex om $a = 34786$ så blir $b = 3478 - 2 \cdot 6 = 3466$. Visa att $7 \mid a$ om och endast om $7 \mid b$.

   Tips: Visa att $2a + b \equiv 0 \pmod 7$. Utnyttja sedan detta för att visa påståendet. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 11 januari. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle i början av vårterminen. Plats och tid meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper.

LYCKA TILL! Stefan.