**Lösningar för tenta i TMV200 Diskret matematik** 2018-08-31 kl. 14:00–18:00

1. **Svar:** Ja, det gäller, vilket visas med induktion nedan.

   Vi betecknar

$$VL(n) = \sum_{k=1}^{n} 3k(k-1) \qquad \text{och} \qquad HL(n) = (n-1)n(n+1),$$

   och låter $U(n)$ vara utsagan (påståendet) att $VL(n) = HL(n)$.

   Eftersom

$$VL(1) = \sum_{k=1}^{1} 3k(k-1) = 3 \cdot 1 \cdot (1-1) = 0 = (1-1) \cdot 1 \cdot (1+1) = HL(1)$$

   är $U(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.

   Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $U(p) \Rightarrow U(p+1)$. Antag därför att $U(p)$ är sann för något visst $p$, dvs att $VL(p) = HL(p)$. Det gäller nu att

$$\begin{aligned} VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} 3k(k-1) &= 3(p+1)(p+1-1) + \sum_{k=1}^{p} 3k(k-1) \\ &= 3(p+1)p + VL(p) = 3p(p+1) + HL(p) \\ &= 3p(p+1) + (p-1)p(p+1) = p(p+1)(3+p-1) \\ &= p(p+1)(p+2) = (p+1-1)(p+1)(p+1+1) = HL(p+1), \end{aligned}$$

   där de coelinblå uttrycken ovan är lika enligt antagandet att $U(p)$ är sann. Vi har nu funnit att $U(p+1)$ är sann så fort $U(p)$ är sann, dvs induktionssteget $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ gäller.

   Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $U(n)$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

2. Vi försöker hitta ett motsägelsebevis (eller ett motexempel). Vi antar därför att slutsatsen $q$ är falsk, och ser om detta kan ske medan de tre hypoteserna är sanna.

   Om $q = F$ måste $p = S$ enligt tredje hypotesen, och då blir första hypotesen alltid sann. Av andra hypotesen får vi att $r = S$. Då kan inte fjärde hypotesen vara sann, då detta ger en motsägelse.

   Om slutsatsen är falsk måste alltså någon av hypoteserna vara falsk, och argumentet är således giltigt.

   **Svar:** Argumentet är giltigt, enligt motsägelsebeviset ovan.

3. (a) Det finns fyra färger att välja bland, och vi skall välja tre valörer av tretton. Dett kan alltså göras på $4 \cdot \binom{13}{3}$ sätt.

   **Svar:** Det finns $4 \cdot \binom{13}{3}$ sådana utfall.

   (b) Här skall vi välja en valör och två färger, och sedan en till valör av någon färg. Detta kan göras på $\binom{4}{2} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 4 = 3744$ sätt.

   **Svar:** Det finns 3744 sådana utfall.

(c) Vi kan välja de tre valörerna på tolv sätt, och för varje kort kan dess färg väljas på fyra sätt. Detta ger oss $12 \cdot 4^3 = 768$ sätt.

**Svar:** Det finns totalt 768 olika utfall.

**4.** Låt $x$ beteckna antalet hattar i karavanen. Av informationen i uppgiften kan vi ställa upp kongruenserna

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \mod 15 \\ x \equiv 5 \mod 14. \end{cases}$$

Eftersom $\text{sgd}(15, 14) = 1$ utlovar kinesiska restsatsen att detta system av kongruenser har lösningar, och vi söker den minsta positiva lösningen.

Vi börjar med att finna multiplikativa inversen till 2 modulo 15, vilket kan göras genom att testa att multiplicera med talen 1 till 14 (eller genom Euklides algoritm). Man finner att $8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 1 \mod 15$. Vi multiplicerar alltså första kongruensen med 8 och får

$$\begin{cases} x \equiv 9 \mod 15 \\ x \equiv 5 \mod 14, \end{cases}$$

eftersom $8 \cdot 3 \equiv 24 \equiv 9 \mod 15$.

Av första kongruensen, $x \equiv 9 \mod 15$, får vi att $x = 9 + 15s$ för något heltal $s$. Insättning av detta i den andra kongruensen ger

$$9 + 15s \equiv 5 \mod 14 \quad \Leftrightarrow \quad s \equiv 10 \mod 11 \quad \Leftrightarrow \quad s = 10 + 14t,$$

där även $t$ är ett heltal.

Vi kom tidigare fram till att $x = 9 + 15s$, och detta ger oss nu

$$x = 9 + 15s = 9 + 15(10 + 14t) = 159 + 15 \cdot 14t,$$

och minsta positiva lösningen ges då $t = 0$ och är $x = 159$.

**Svar:** Minsta antalet hattar som karavanen kan ha fört med sig är $x = 159$.

**5.** (a) Det finns åtta bokstäver, varav tre finns som dubletter. Detta ger $\frac{8!}{2!2!2!} = 7! = 5040$ olika ord.

**Svar:** Vi kan bilda 5040 olika "ord".

(b) Om första bokstaven är K finns det $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ sätt att ordna de eftrerföljande bokstäverna, eftersom det finns två dubletter kvar. Om första bokstaven är D finns det tre dubletter kvar, vilket ger $\frac{7!}{2!2!2!} = 630$ ord. Sammantaget finns det alltså $1260 + 630 = 1890$ olika "ord".

**Svar:** Det kan bildas 1890 olika "ord".

(c) Vi sätter ihop KURR till en ny bokstav $\mathcal{K}$, som vi sedan skall kombinera med de resterande fyra bokstäverna. Eftersom det inte finns några dubletter kvar får vi bara $5! = 120$ olika "ord".

**Svar:** Det kan bildas 120 olika "ord".

**6.** (a) Vi kontrollerar enkelt att $x \star y = x^2y + xy^2 = y^2x + yx^2 = y \star x$, så operatorn är kommutativ.

**Svar:** Ja, operatorn är kommutativ.

(b) Genom att testa med några enkla värden ser vi exempelvis att

$$1 \star (1 \star 2) = 1 \star 6 = 42$$

medan

$$(1 \star 1) \star 2 = 2 \star 2 = 16,$$

så operatorn är inte associativ.

**Svar:** Nej, operatorn $\star$ är inte associativ.

(c) Eftersom operatorn är kommutativ räcker det med att undersöka huruvida det finns något $e \in \mathbb{R}_+$ så att $e \star x = x$ för alla $x \in \mathbb{R}_+$. Ett sådant $e$ måste uppfylla

$$e = e^2x + ex^2 \Leftrightarrow 1 = ex + x^2 \Leftrightarrow e = \frac{1 - x^2}{x}.$$

Vi måste alltså använda olika $e$ för olika $x$, så det finns inget $e$ som fungerar för alla.

**Svar:** Nej, $\star$ saknar identitet.

**7.** (a) Grafen $G$ är sammanhängande men innehåller cykler, och är alltså inte ett träd.

**Svar:** Nej, grafen $G$ är inte ett träd.

(b) Vi kan inte dela upp nodmängden $V$ i två disjunkta delmängder, där ingen av grafens kanter går *inom* respektive mängd (noderna $\{A, B, C\}$ har alla bågar till varandra). Grafen $G$ är alltså inte bipartit.

**Svar:** Nej, $G$ är inte en bipartit graf.

(c) Grafen $G$ är sammanhängande, och enligt en känd sats innehåller en sammanhängande graf en Eulerväg precis då högst två noder har udda gradtal. I grafen $G$ har inga noder udda gradtal, så $G$ innehåller en Eulerväg (i själva verket en Eulercykel).

**Svar:** Ja, $G$ innehåller en Eulerväg.

(d) Ett träd är en sammanhängande graf utan cykler, så vi söker antalet sätt att välja ut två noder (tillsammans med alla bågar till dem) att ta bort från $G$ så att det som blir kvar (dvs den inducerade delgrafen) är sammanhängande och saknar cykler. Vi ser att vi måste ta bort endera av $A$ och $B$, samt endera av $D$, $E$, eller $F$. Detta ger oss $2 \cdot 3 = 6$ olika val.

**Svar:** Sex av de inducerade delgraferna till $G$ är träd.

**8**. (a) Primtalsfaktorisering ger $344 = 2^3 \cdot 43$, och vi kan nu beräkna

$$\Phi(344) = 2^{3-1}(2-1)(43-1) = 4 \cdot 1 \cdot 42 = 168.$$

**Svar:** $\Phi(344) = 168$.

(b) Med hjälp av primtalsfaktoriseringen i (a) ser vi att $\text{sgd}(344, 3) = 1$ (alternativt kan vi använda Euklides algoritm för att upptäcka detta). Eftersom $\text{sgd}(344, 3) = 1$ försäkrar Eulers sats att

$$3^{\Phi(344)} \equiv 1 \mod 344, \quad \text{dvs} \quad 3^{168} \equiv 1 \mod 344.$$

Enligt divisionsalgoritmen är $2018 = 12 \cdot 168 + 2$, så vi får

$$x \equiv 3^{2018} \equiv 3^{12 \cdot 168 + 2} \equiv (3^{168})^{12} \cdot 3^2 \equiv 1^{12} \cdot 3^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \mod 344.$$

Detta betyder att $x = 9 + 344k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

**Svar:** De sökta talen är $x = 9 + 344k$ för alla $k \in \mathbb{Z}$.