Problemblad 1

Problem 1. Antag att $P_1, \ldots, P_n$ är logiska ustagor. Gäller det att

$$(P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_3) \;\Rightarrow\; (P_1 \to P_3)? \tag{1}$$

Gäller det omvända, $(P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_3) \;\Leftarrow\; (P_1 \to P_3)$?

Om $I = \{1, \ldots, n-1\}$, för vilka j och k gäller det att

$$\forall i \in I : [P_i \to P_{i+1}] \;\Rightarrow\; (P_j \to P_k)? \tag{2}$$

Går det att garantera att (2) gäller för alla $j, k \in I \cup \{n\}$ genom att ta med ytterligare en implikation (som inte innehåller j eller k) på vänstra sidan? Vilken?

Problem 2. Den så kallade *välordningsprincipen* säger att varje icketom delmängd av de naturliga talen innehåller ett minsta element. (Antingen välordningsprincipen eller den ekvivalenta *induktionsprincipen*, som vi kommer att stöta på nästa vecka, brukar utgöra ett axiom.)

Om vi antar att välordningsprincipen gäller, gäller det då även att varje icketom *äkta* delmängd till de naturliga talen innehåller ett minsta element? Gäller detta för heltalen $\mathbb{Z}$? Gäller det för de positiva rationella talen $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$? (Bevisa att det gäller, eller hitta konkreta motexempel.)

Problem 3. Antag att x och y är tvåsiffriga *binära tal*[1]. Om vi identifierar 0 med sanningsvärdet F och 1 med sanningsvärdet S kan var och en av de tre siffrorna i $z = x + y$ skrivas som logiska uttryck i de fyra siffrorna i talen x och y.

Ange logiska uttryck som ger de tre siffrorna i z. Det kan vara användbart att införa operationen XOR (*exclusive or*), $P \oplus Q$, som ges av följande sanningstabell:

P	Q	$P \oplus Q$
F	F	F
F	S	S
S	F	S
S	S	F

(Ett smidigt sätt att åskådliggöra operationerna är att göra upp ett så kallat *logikschema*, liknande de kopplingsscheman som förekommer inom kretsteorin.)

[1] Det vanliga talsystemet vi använder till vardags kallas det *decimala talsystemet*, eftersom det utgår från *basen* tio och använder tio siffror (0–9). Exempelvis är, som bekant,

$$1503 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0. \tag{3}$$

Samma princip ligger bakom talsystem med andra baser än tio. I det *binära talsystem* använder vi basen två och siffrorna 0 och 1. Här gäller exempelvis (den nedsänkta tvåan anger att det är ett binärt tal)

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13 \tag{4}$$

och

$$\begin{array}{rr} & 101_2 \\ + & 11_2 \\ \hline & 1000_2 \end{array} \tag{5}$$

(glöm inte ”minnessiffran” vid addition).