Problemblad 2

Problem 1. Låt A och B vara mängder med $|A| = m$ och $|B| = n$, där $m, n \in \mathbb{N}$. Om $f : A \to B$ är injektiv, hur förhåller sig då m och n? Om istället $f : B \to A$ är surjektiv, hur förhåller sig då m och n? Om $f : B \to A$ är bijektiv, hur förhåller sig då m och n?

Betrakta funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ given av

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases} \tag{1}$$

Är f injektiv? Är f surjektiv? Är f bijektiv? Är detta förenligt med första delen av uppgiften?

(När vi har att göra med oändligheter, exempelvis i form av oändliga mängder, kan det hända saker som vi upplever som paradoxala. Skall vi tala om oändligheter är det viktigt att vi först faktiskt preciserar vad vi menar och sedan kritiskt resonerar utifrån det, annars lurar vi nästan säkert oss själva!)

Problem 2. Låt A vara en mängd som innehåller precis tre element. Vi har behandlat de fyra egenskaperna *reflexivitet*, *symmetri*, *antisymmetri*, och *transitivitet* för relationer på en mängd. För var och en av dessa egenskaper, finns det någon relation på A som har just den egenskapen men ingen av de tre övriga? Ge (minst) ett konkret exempel för var och en av egenskaperna, eller förklara i förekommande fall varför det inte går.

Problem 3. Om $A = \{5, -1, 3\}$ är ju

$$\sum_{a \in A} a = 5 + (-1) + 3 = 7 \quad \text{och} \quad \prod_{a \in A} a = 5 \cdot (-1) \cdot 3 = -15, \tag{2}$$

dvs vi har bara skrivit ut elementen i A på en rad och satt in rätt operator ($+$ för summan $\sum$ och $\cdot$ för produkten $\prod$) mellan elementen. Om vi på detta sätt skulle införa en symbol M för upprepad subtraktion och en symbol Δ för upprepad division, vilka värden skulle då

$$\mathop{\mathrm{M}}_{a \in A} a \quad \text{respektive} \quad \mathop{\Delta}_{a \in A} a \tag{3}$$

kunna anta? Resonera kring varför det normalt inte definieras symboler motsvarande M och Δ för upprepad subtraktion eller division. Är det så att det finns några problem med M och Δ, eller är det helt enkelt så att $\sum$ och $\prod$ redan täcker behoven?