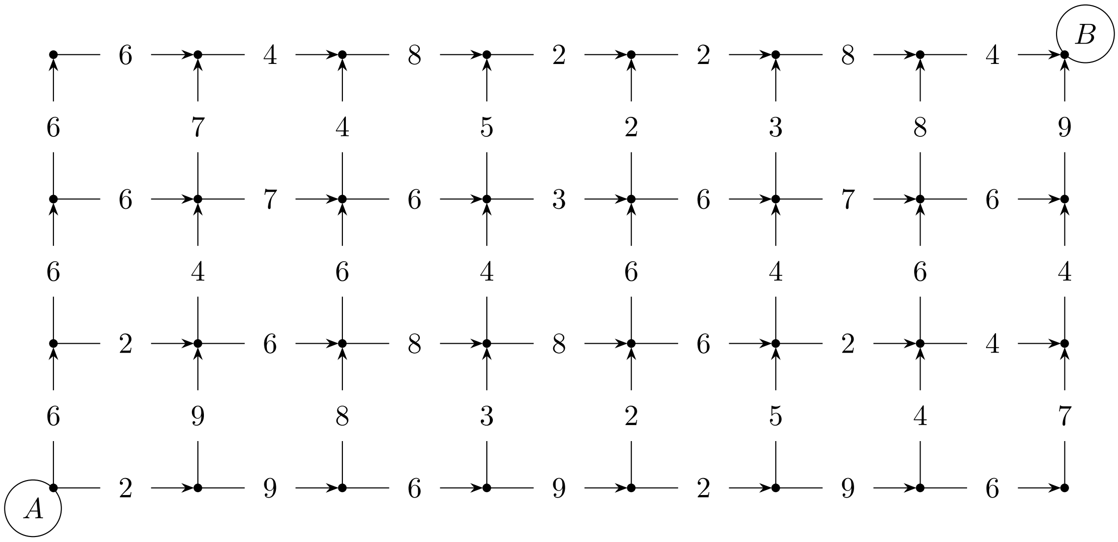
Problemblad 3

Problem 1. Låt en talföljd definieras enligt

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(n) = f(n-1) + 2n + 1, \quad n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Beräkna några tal i följden, och gissa utifrån dessa en direkt (alltså inte rekursiv) formel för $f(n)$. Använd induktion för att bevisa denna formel.

Problem 2. Om vi skall gå från A till B i Figur 1, vilken är då största respektive minsta möjliga summan av alla siffror vi passerar längs vägen? Om vi bortser helt från siffrorna, på hur många olika sätt kan vi gå från A till B?



Figur 1: Vi skall gå från A till B, och får endast färdas i pilarnas riktning.

Problem 3. Ur definitionen av kongruens följer att om $n \geq 2$ och x är heltal så gäller $n|x \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{n}$. Detta kan användas för att hitta diverse delbarhetsregler!

Det är välkänt att ett heltal x, skrivet i det decimala talsystemet, är delbart med tre precis då dess siffersumma är delbar med tre.[1] Om vi skriver x i det binära talsystemet istället (se Problemblad 1, Problem 3) fungerar inte detta kriterium: trots att $18 = 10010_2$ är

$$\text{siffersumma}(10010_2) = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 2 \qquad \text{(ej delbar med tre).} \tag{4}$$

Hitta ett kriterium för när ett heltal x är delbart med tre, som gäller när x är skrivet i det binära talsystemet. (Missa inte fotnoten!)

[1] Detta kan vi se på följande sätt: Låt a_k beteckna siffra nummer k (börja räkna på noll) från höger i talet. Om x är ett tal med $n+1$ siffror är

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \tag{2}$$

och eftersom $10 \equiv 1 \pmod 3$ blir

$$x \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod 3. \tag{3}$$