Linjer

En linje i planet som inte är lodrät kan skrivas på formen $y = kx + m$ där $k, m \in \mathbb{R}$. En lodrät linje har ekvationen $x = n$ för något $n \in \mathbb{R}$. För att slippa olika typer av ekvationer kan man skriva båda fallen som

$$Ax + By + C = 0,$$

där $y = kx + m$ t ex svarar mot $A = k$, $B = -1$ och $C = m$ och $x = n$ t ex svarar mot $A = 1$, $B = 0$ och $C = -n$. Omvänt så är de punkter i planet som satisfierar $Ax + By + C = 0$ en rät linje (såvida inte $A = B = 0$ då det antingen är hela planet eller tomma mängden).
Ett annat sätt att beskriva en linje är med hjälp av en punkt $P = (x_0, y_0)$ på linjen och en riktningsvektor $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ för linjen, d v s en vektor som är parallell med linjen. Om $R = (x, y)$ är en godtycklig punkt på linjen så är $\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v}$ för något $t \in \mathbb{R}$. I koordinatform blir detta

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2. \end{cases}$$

Detta brukar kallas **linjens ekvation på parameterform**.
Antag nu att vi har en linje given av $Ax + By + C = 0$. En riktningsvektor ges av $\overrightarrow{P_0P_1}$ där P_0 och P_1 är godtyckliga punkter på linjen och från detta får man linjens ekvation på parameterform. Ett annat sätt är att helt enkelt sätta $x = t$ (om $B \neq 0$, annars $y = t$) och sedan lösa ut $y = (1/B)(-At - C)$, d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C/B \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -A/B \end{pmatrix}.$$

Härifrån ser vi att $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -A/B \end{smallmatrix}\right) = (1/B)\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor. Om vi istället sätter $y = t$ (antar $A \neq 0$) så får vi $x = (1/A)(-Bt - C)$, d v s

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C/A \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -B/A \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I det här fallet får vi att $\left(\begin{smallmatrix} -B/A \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = (-1/A)\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor. I båda fallen får vi alltså att $\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ är en riktningsvektor.
Observera också att $\mathbf{n} = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ är ortogonal mot riktningsvektorn $\left(\begin{smallmatrix} B \\ -A \end{smallmatrix}\right)$ och alltså är $\mathbf{n} = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ en så kallad **normalvektor** till linjen $Ax + By + C = 0$.

Exempel 1 *Tag linjen $y = 3x + 7$. Den kan vi skriva som $1y - 3x - 7 = 0$. En normalvektor till linjen ges då av $\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}^t$ så att $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^t$ är en riktningsvektor för linjen. Punkten $(0, 7)$ ligger på linjen så linjens ekvation på parameterform blir*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

På motsvarande sätt ges ekvationen på parameterform för en linje i rummet av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

där $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en punkt på linjen och $\mathbf{v}$ en riktningsvektor. I rummet kan man inte ge en linje med en ekvation av typen $Ax + By + Cz + D = 0$ (detta blir som vi ska se ett plan). Däremot kan man ge en linje som de punkter som uppfyller **två** sådana ekvationer.

Plan

Låt π vara ett plan i rummet och antag att $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^t$ är en normalvektor till planet, d v s $\mathbf{n}$ är ortogonal mot varje vektor som är parallell med planet. Om $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en fix punkt i planet och $P = (x, y, z)$ en godtycklig punkt i planet, så gäller alltså att

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\ &= A(x - x_0) + B(x - x_0) + C(z - z_0) \\ &= Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0). \end{aligned}$$

Observera att P_0 antogs vara en fix punkt så att x_0, y_0 och z_0 är några fixa tal så att $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ är ett bestämt tal. Vi får alltså att

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

är ekvationen för ett plan med normalvektorn $\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}^t$. Notera analogin med ekvationen för en linje i planet.

Exempel 2 *Bestäm ekvationen för planet som går genom punkten* $(1, 2, 3)$ *och som har* $(4, 5, 6)$ *som normalvektor. Vi såg ovan att ekvationen är på formen* $4x + 5y + 6z + D = 0$ *för något* D*. Man bestämmer enklast* D *genom att utnyttja att* $(1, 2, 3)$ *ligger på planet så att*

$$0 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + D = 32 + D,$$

så att $D = -32$ *och ekvationen är* $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

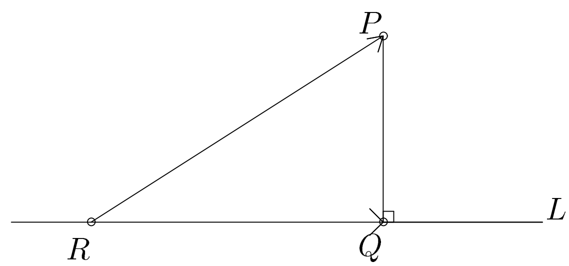
Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ vara två ickeparallella vektorer som är parallella med ett plan. Då är varje vektor $\mathbf{w}$ som är parallell med planet en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Så om $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en fix punkt i planet och $P = (x, y, z)$ är en godtycklig punkt i planet så gäller att $\overrightarrow{P_0P} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ för några $s, t \in \mathbb{R}$. I koordinatform blir detta

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 + tx_2 \\ sy_1 + ty_2 \\ sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y = y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z = z_0 + sz_1 + tz_2. \end{cases}$$

Detta brukar kallas **planets ekvation på parameterform**.

Avstånd

Först ska vi ge en metod för att beräkna (minsta) avståndet d från en punkt P till en rät linje L. Avståndet ges ju av avståndet mellan P och den punkt Q på L som är sådan att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot L. Det gäller alltså att bestämma Q, eller i varje fall $|\overrightarrow{PQ}|$.



Låt R vara en fix punkt på L, vilken som helst. Då är triangeln PQR rätvinklig och $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RP}_L$, d v s $\overrightarrow{RP}$:s ortogonala projektion på L. Med hjälp av Pythagoras sats får man då

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{|\overrightarrow{RP}|^2 - |\overrightarrow{RQ}|^2} = \sqrt{|\overrightarrow{RP}|^2 - |\overrightarrow{RP}_L|^2}.$$

Anmärkning 1 *Observera att denna metod fungerar både i två och tre dimensioner. Notera också att valet av punkten R inte påverkar resultatet.*

Exempel 3 *Vad är avståndet d mellan punkten $P = (1, 2, 3)$ och linjen L given av*

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$$

Låt t ex $R = (4, 5, 6) \in L$. Vi har att $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ är en riktningvektor för L och en enhetsvektor parallell med $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Vi får därmed om $\overrightarrow{RQ}$ är den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{RP}$ på L att

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{RP}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{3}. \\
\left|\overrightarrow{RQ}\right| &= \left|\overrightarrow{RP}_L\right| = \left|(\overrightarrow{RP}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}\right| = \left|\overrightarrow{RP}\cdot\mathbf{e}\right|\,|\mathbf{e}| = \left|\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{18}{\sqrt{14}}. \\
d &= \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{RP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{RQ}\right|^2} = \sqrt{27 - \frac{18^2}{14}} = \sqrt{\frac{27(7-6)}{7}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}.
\end{aligned}$$

Vi ska nu angripa problemet att beräkna avståndet d mellan en punkt $P = (x, y, z)$ och ett plan π i rummet. Antag att ekvationen för planet är given av $Ax + By + Cz + D = 0$. Då är

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

en normalvektor till π av längd 1. Låt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vara en godtycklig punkt i planet. Avståndet från P till π ges då av längden av den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på normalen till planet. Vi får alltså att

$$\begin{aligned} d &= |(\mathbf{e} \cdot \overrightarrow{P_0P})\mathbf{e}| = |\mathbf{e} \cdot \overrightarrow{P_0P}| = \left| \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{|Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

där den sista likheten följer av att P_0 ligger i planet så alltså är

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Till slut påpekar vi att man bör försöka förstå hur man kommer fram till de olika formlerna för avstånden istället för att försöka memorera dem.