MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2005-08-24.
Tentamen i Matematik IT, del B (gamla kursen), TMA245, 2005-08-24.

Lösningar:

1. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 12 & 3 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger z fri, $y = (1+z)/2$ och $x = 4 - 3z$.

2. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som rader. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-2) = 0,$$

   så de är linjärt beroende.

   Alternativt kan man observera att determinanten är samma som i första uppgiften förutom att sista raden är en multipel av den sista raden där och eftersom man fick oändligt många lösningar så måste de vara linjärt beroende.

3. Låt $P = (1,2,0)$ och $Q = (2,2,3)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$

   Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(-1\ 0\ \ -3)^t\right|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

   och

$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|-10/\sqrt{14}\right|^2 = 50/7.$$

   Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10 - 50/7} = \sqrt{20/7}$.

4. (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

som har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som ger multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

som har lösning alla multipler av $(1\ 1)^t$. Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ \ -1)^t$ och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ 1)^t$.

(b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multipler av $(1\ 1)^t$ är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $(1\ 1)^t$.

5. Om R är matrisen för rotationen och S är matrisen för speglingen så är den sökta matrisen $M = SR$. Vi har att rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen avbildar $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ på $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ och vice versa så

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$M = SR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Alla vektorer som är normaler till planet, d v s vektorer på formen $(0\ 0\ z)^t$, avbildas på nollvektorn. Dessa kommer därför att vara egenvektorer med egenvärdet 0.

Alla vektorer som är parallella med planet, d v s vektorer på formen $(x\ y\ 0)^t$ kommer att vara oförändrade så de kommer alltså att vara egenvektorer med egenvärdet 1.

Vi har nu hittat tre linjärt oberoende egenvektorer (t ex de tre enhetsvektorerna) och därmed har vi hittat alla egenvektorer och egenvärden eftersom en 3×3-matris inte kan ha fler egenvektorer.

7. Låt $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Förutsättningarna i uppgiften ger att

$$|\mathbf{u}| = 2|\mathbf{v}| \text{ och } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos\frac{\pi}{3}|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = \frac{1}{2} \cdot 2|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}|^2.$$

Den sökta vinkeln α uppfyller att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}.$$

Genom att utnyttja förutsättningarna så får vi att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 3|\mathbf{v}|^2$$

och

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= (|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 7|\mathbf{v}|^2\cdot 3|\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

Det ger att

$$\cos\alpha = \frac{3|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{7}\sqrt{3}|\mathbf{v}|^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ och } \alpha = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

8. Låt parallellogrammen vara $ABCD$. Låt $PQRS$ vara mittpunkterna i kvadraterna på sidorna AB, BC, CD respektive DA. Vi ska visa att $PQRS$ är en kvadrat. Sätt $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{v}$. Låt $\mathbf{u}'$ vara vektorn från mittpunkten av AB till P. Då gäller att $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|$ och $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = 0$. På motsvarande sätt låt $\mathbf{v}'$ vara vektorn från S till mittpunkten på AD. Då är $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$ och $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}' = 0$. Dessutom gäller att $(\mathbf{u},\mathbf{u}')$ och $(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ har samma orientering så $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}'$ och $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' = -\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}$. Den sista likheten följer av att om vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}'$ är α så är den mellan $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}$ $\pi-\alpha$ och $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$.

   Om vi adderar vektorer och utnyttjar att $ABCD$ är en parallellogram så får vi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{SR} = -\mathbf{u}'+\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{v}', \\ \overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{PS} = -\mathbf{v}'+\mathbf{v}-\mathbf{u}-\mathbf{u}'. \end{aligned}$$

   Vi ska visa att $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$ och $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$. Direkt beräkning samt utnyttjande av sambanden mellan $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}'$ ger

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QR}\right|^2 &= \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QR} \\ &= -4\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}' + 4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR} &= -2\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' + |\mathbf{u}'|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}|^2 = 0. \end{aligned}$$

   Detta var precis vad vi skulle visa och därmed är saken klar.