MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2006-01-13.
Tentamen i Matematik IT del B, TMA245b, 2006-01-13.

Lösningar:

1. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot 4/9 = 1$.

2. Låt $Q = (2,2,3)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$

Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(-1\ 0\ -3)^t\right|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

och

$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|-10/\sqrt{14}\right|^2 = 50/7.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10-50/7} = \sqrt{20/7}$.

3. En riktningsvektor för planet ges av riktningsvektorn för linjen $\mathbf{v}_1 = (1\ 2\ 3)^t$. En andra riktningsvektor $\mathbf{v}_2$ får man genom att ta vektorn från origo till en punkt på linjen, t ex $(2,2,3)$. Det ger $\mathbf{v}_2 = (2\ 2\ 3)^t$. Vi får nu en normalvektor till planet

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0\ 3\ -2)^t.$$

Därmed är ekvationen för planet given av $3y - 2z + d = 0$, där $d = 0$ eftersom planet går genom origo. Svaret är alltså $3y - 2z = 0$.

4. Om A har egenvärdena λ_1, λ_2 och λ_3 med motsvarande normaliserade ortogonala egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ så är $A = PDP^t$ där $P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ och D är diagonal med egenvärdena på diagonalen. Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) + 4(-36+4\lambda+4(\lambda-5)) \\ &= -\lambda^3+21\lambda^2-111\lambda+91 = -(\lambda-1)(\lambda^2-20\lambda+91) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-7)(\lambda-13). \end{aligned}$$

Här utnyttjade vi först att man kan addera en multipel av kolonn till en annan utan att ändra determinanten och för att faktorisera polynomet använde vi tipset att $\lambda = 1$ är ett egenvärde. Återstår nu att bestämma egenvektorerna.

$\lambda = 1$: Likheten $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_1 = (1/3) \cdot (-2\ \ -2\ 1)^t$.

$\lambda = 7$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 7\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_2 = (1/3) \cdot (1\ \ -2\ \ -2)^t$.

$\lambda = 13$: Likheten $A\mathbf{v}_2 = 13\mathbf{v}_2$ ger

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket ger $\mathbf{v}_3 = (1/3) \cdot (-2\ 1\ \ -2)^t$.

Vi får alltså

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

5. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolumner. Denna är skild från noll om och endast om vektorerna är linjärt oberoende. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -16 & -52 \\ 0 & -7 & -14 \end{vmatrix} = (-4)(-7) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 28 \cdot (8-13) = -140,$$

så de är linjärt oberoende.

6. Vi har att $\mathbf{e}_y$ är oförändrad och att xz-planet roterar i positiv led. Det ger att

$$A = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Spegling i yz-planet påverkar inte $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ medan $\mathbf{e}_x$ avbildas på $-\mathbf{e}_x$. Det ger att

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sökta matrisen är

$$C = BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7. (a) Vi har att villkoren i uppgiften ger att

$$\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ K_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & \frac{1}{15} \\ -\frac{14}{3} & \frac{47}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix}.$$

Rekursivt får vi då att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix}.$$

så matrisen A är den som eftersöks.

(b) Låt $\mathbf{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$. Dessa är egenvektorer till A och vi får speciellt att

$$\begin{aligned} A^n\mathbf{v}_1 &= 0.9^n\mathbf{v}_1 \\ A^n\mathbf{v}_2 &= 1.1^n\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Varje vektor $\mathbf{x}$ kan skriva som

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Speciellt gäller det att

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2,$$

för några reella tal c_1 och c_2. Vi får då att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = A^n(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1 \cdot 0.9^n\mathbf{v}_1 + c_2 \cdot 1.1^n\mathbf{v}_2.$$

Om det finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar från början så betyder det att $\left(\begin{smallmatrix} R_0 \\ K_0 \end{smallmatrix}\right)$ är en multipel av $\mathbf{v}_1$ och därmed är $c_2 = 0$. Det ger att populationen ges av

$$c_1 \cdot 0.9^n\mathbf{v}_1$$

och den kommer alltså att minska med 10% varje år för båda arterna och det kommer fortsatt att vara 7 gånger så många kaniner som rävar.

Om det inte finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar så är $c_2 \neq 0$ så då kommer till slut (för tillräckligt stora n) termen $c_2 \cdot 1.1^n\mathbf{v}_2$ att dominera vilket betyder en 10-procentig ökning varje år för båda arterna samt 10 gånger så många kaniner som rävar.

8. Alla vektorer i planet kommer att vara oförändrade så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är vinkelräta mot planet avbildas på nollvektorn så dessa har egenvärdet 0. Summerar vi så är alltså $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ tre linjärt oberoende egenvektorer med egenvärdena 1, 1 och 0. Några fler finns det inte, eftersom vi bara kan ha högst tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$.