MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2005-03-18.

Lösningar:

1. (a) Vi beräknar determinanten (ej unik lösning om och endast om $\det A = 0$) med hjälp av Sarrus regel:

   $$\det A = 1\cdot(-a\cdot 3 - 1\cdot 1) - 2\cdot(2\cdot 3 - 1\cdot 2a) + 3\cdot(2\cdot 1 - (-a)\cdot 2a) = 6a^2 + a - 7.$$

   Vi löser andragradsekvationen $0 = 6a^2 + a - 7$ och får $a = 1$ och $a = -7/6$ vilket är de två värden då det inte finns unik lösning.

   (b) Tag t ex $a = 1$ och låt $\mathbf{b}$ vara nollvektorn. Vi har då ett homogent system som ju alltid har oändligt många lösningar om det inte finns en unik sådan.

2. Vi tar punkten $Q = (-3, 0, 0)$ på planet (går bra med vilken punkt som helst). Avståndet från P till planet ges nu av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{PQ}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{PQ}$ på (den normerade) normalen $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\,1\,2)^t$ till planet. Denna ges av

   $$\left|\overrightarrow{PQ}_{\mathbf{n}}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}\right||\mathbf{n}| = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\begin{pmatrix}-6\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

3. Det finns oändligt många plan som innehåller den givna linjen. Det enda som krävs är att planets normal är vinkelrät mot riktningsvektorn för linjen och att det innehåller en punkt på linjen. Riktningsvektorn för linjen är $(1\,1\,-2)^t$ så vi kan t ex ta $\mathbf{n} = (1\,1\,1)^t$ som normal. Därmed får vi en ekvation på formen $x + y + z + D = 0$ där vi bestämmer D genom att utnyttja att punkten $P = (1,\ 2,\ 3)$ ligger på linjen (och därmed ska ligga på planet). Det ger $1 + 2 + 3 + D = 0$, så $D = -6$. Ett exempel på ett plan som uppfyller kriterierna är alltså $x + y + z = 6$.

4. Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F-basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

   $$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E.$$

   Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

   $$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}.$$

   Vi får då

   $$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\5\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0\cdot\mathbf{f}_1+\frac{5}{3}\cdot\mathbf{f}_2+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(1,1,1)$:

$$0\cdot\mathbf{f}_1+\frac{5}{3}\cdot\mathbf{f}_2+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\mathbf{f}_3=\frac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

5. (a) Vi får att antalet ungar respektive vuxna talgoxar år $k+1$ uppfyller

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 0.1x_k+1.4y_k\\ y_{k+1} &= 0.2x_k+0.7y_k.\end{aligned}$$

Med matrisnotation blir detta $\mathbf{v}_{k+1}=A\mathbf{v}_k$ med

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 1.4\\ 0.2 & 0.7\end{pmatrix}.$$

(b) I det långa loppet kommer antalet talgoxar att öka med 0.8% per år och andelen unga fåglar kommer att vara 61%. Detta följer av att eftersom $\lambda_1>1$ och $|\lambda_2|<1$ så kommer fördelningen att närma sig en multipel av $\mathbf{u}_1$ och denna multipel kommer varje år att multipliceras med λ_1.

6. Låt $\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1\,1\,2)^t$ vara en normerad normalvektor till planet och bestäm $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ så att de har längd 1, är ortogonala och spänner upp planet. Man kan t ex ta $\mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\,-1\,0)^t$ och $\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2$ (eller direkt observera att) $\mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,-1)^t$ duger. I basen $(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)$ har avbildningen matrisen

$$A_F=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Det ger att den i standardbasen har matrisen

$$A=FA_FF^{-1}=FA_FF^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man direkt utnyttja att

$$A=I-2\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1^t.$$

7. (a) Vi vet att $|\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|$ och att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\cos\alpha\,|\mathbf{x}||\mathbf{y}|=\frac{1}{3}|\mathbf{x}|^2.$$

Vi ska beräkna β där
$$\cos\beta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\,\mathbf{u}\,||\,\mathbf{v}\,|}.$$
Vi beräknar täljaren och (kvadraten av) nämnaren var för sig:
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y}) = ac\,|\,\mathbf{x}\,|^2 + bd\,|\,\mathbf{y}\,|^2 + (ad+bc)\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \\ &= (ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc))\,|\,\mathbf{x}\,|^2\end{aligned}$$
och
$$\begin{aligned}|\,\mathbf{u}\,|^2|\,\mathbf{v}\,|^2 &= ((a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}))\,((c\mathbf{x}+d\mathbf{y})\cdot(c\mathbf{x}+d\mathbf{y})) \\ &= \left(a^2\,|\,\mathbf{x}\,|^2 + b^2\,|\,\mathbf{y}\,|^2 + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right)\left(c^2\,|\,\mathbf{x}\,|^2 + d^2\,|\,\mathbf{y}\,|^2 + 2cd\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\right) \\ &= (a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)\,|\,\mathbf{x}\,|^4\,.\end{aligned}$$
Beräknar vi kvoten så får vi att termerna som innehåller längden av $\mathbf{x}$ tar ut varandra och vi får:
$$\beta = \arccos\frac{ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc)}{\sqrt{(a^2+\frac{2}{3}ab+b^2)(c^2+\frac{2}{3}cd+d^2)}}.$$

(b) Vi ska se till att täljaren i argumentet till arccos blir 0, d v s
$$0 = ac+bd+\frac{1}{3}(ad+bc).$$
En lösning (bland oändligt många) är $a=b=c=1$ och $d=-1$.

8. Motstående hörnen i en kub med sidan a och sidorna längs axlarna i koordinatsystemet har koordinaterna:
$$\begin{array}{ccc}(0,0,0) & \text{och} & (a,a,a)\\ (0,0,a) & \text{och} & (a,a,0)\\ (0,a,a) & \text{och} & (a,0,0)\\ (0,a,0) & \text{och} & (a,0,a).\end{array}$$
Rymddiagonalerna är alltså vektorerna
$$\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\\a\\-a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a\\-a\\-a\end{pmatrix}\ \text{och}\ \begin{pmatrix}a\\-a\\a\end{pmatrix}.$$
Längden av var och en av dessa är $\sqrt{3}a$ och skalärprodukten mellan dem är antingen a^2 eller $-a^2$. Det betyder att vinkeln β mellan ett par av dessa vektorer uppfyller
$$\cos\beta = \frac{\pm a^2}{\sqrt{3}a\sqrt{3}a} = \pm\frac{1}{3}.$$
Om $\cos\beta < 0$ så är vinkeln mellan vektorerna trubbig och cosinus av den spetsiga vinkeln mellan diagonalerna är då negationen av det värdet. Alltså är cosinus för vinkeln mellan diagonalerna alltid $1/3$.