MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2006-03-10.
Tentamen i Matematik IT del B, TMA245b, 2006-03-10.

Lösningar:

1. Ett homogent system har alltid minst en lösning (den triviala) och därmed är svaret på första frågan: aldrig. För att avgöra när det finns oändligt många lösningar så kan man t ex beräkna determinanten som är noll om och endast om det finns oändligt många lösningar. Vi använder Gausselimination och får

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+\frac{5}{2} \end{vmatrix}.$$

Alltså vi har oändligt många lösningar om och endast om $a = -\frac{5}{2}$ och i övriga fall en unik lösning.

2. Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in t ex punkten P_3 och får $-2 + 1 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y + 1 = 0.$$

3. Låt $Q = (-2, 0, 0)$. Då är Q en punkt på linjen ($t = -3$). Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från $P = (1, 1, 1)$ till linjen av

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$

Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(3\ 1\ 1)^t\right|^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11$$

och

$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|8/\sqrt{14}\right|^2 = 64/14 = 32/7.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{11 - 32/7} = \sqrt{45/7}$.

4. Vi skapar sammansättningen av avbildningen som avbildar $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ på standardbasen följt av avbildningen som avbildar standardbasen på $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$. Detta är uppenbarligen avbildningen som vi söker. Den första avbildningen ges av inversen till A där A avbildar standardbasen på $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och om vi kallar den andra matrisen för B så får vi enligt bassatsen att

$$A = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \text{ så } A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

och

$$B = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 11\\ -7 & 13\end{pmatrix}.$$

5. Vi vet att en matris som uppfyller kraven är $A = PDP^{-1}$, där D är en diagolmatris med egenvärdena på diagonalen och P en matris med egenvektorerna som kolonner. Observera att de tre egenvektorerna är ortogonala, så vi kan välja P som en ON-matris genom att normera egenvektorerna. Därmed kommer vi att ha $P^{-1} = P^t$.

   Vi sätter alltså t ex

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

vilket ger

$$A = PDP^t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}34 & 12 & 0\\ 12 & 41 & 0\\ 0 & 0 & 100\end{pmatrix}.$$

6. Om någon av vektorerna är nollvektorn så är de olika produkterna trivialt nollvektorn i båda fallen. Antag nu att de inte är nollvektorn.

   (a) Enligt definitionen är $\mathbf{x}\times\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{x}$ och därmed är $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(b) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ och då är förstås även $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Om de inte är parallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{x} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$ ligger i detta plan och är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Vi har att $\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ om och endast om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$ är parallella. Eftersom $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ alla ligger i ett plan och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{u}$ är ortogonala så är detta ekvivalent med att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. Alltså är

$$((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella eller ortogonala.

7. Det räcker att visa att det är sant i rummet. Om man är i planet kan man helt enkelt betrakta detta som t ex xy-planet i rummet (med tredje koordinaten lika med noll).

Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara sidorna i parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som diagonalvektorer. Då gäller (lite olika beroende på hur man ordnar och riktar diagonalerna) att $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{u}$ och $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{v}$ vilket ger att $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ och $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Arean av parallellogrammen som spänns upp av två vektorer är lika med längden av deras vektorprodukt. Alltså är arean av P_2 lika med $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ och arean av P_1 lika med $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|$. Räkneregler för vektorprodukt ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbf{0} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{0}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Därmed är arean av P_1 lika med $\frac{1}{2}|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ och alltså hälften av arean av P_2.

8. (a) Antag att $n \geq 4$. De fyra första kolumnerna i A ser ut så här:

$$\det(A) = \begin{vmatrix}
x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & \cdots \\
(x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & \cdots \\
(x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & \cdots \\
(x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+6)^2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix}$$

Vi subtraherar 3:e kolonnen ifrån den 4:e, 2:a kolonnen ifrån den 3:e och slutligen den 1:a kolonnen ifrån den 2:a. Detta ändrar inte värdet på determinanten och eftersom $(x+n)^2 - (x+(n-1))^2 = 2x + 2n - 1$

så får vi då:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 & 2x+9 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2x+9 & 2x+11 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar nu återigen 3:e kolonnen ifrån den 4:e och 2:a kolonnen ifrån den 3:e och får nu

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0,$$

eftersom två kolonner är identiska.

(b) Det räcker att ta ett exempel och beräkna determinanten och se att den inte blir noll. Sätt t ex $x = 0$ vilket ger

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -8.$$

I själva verket är den -8 oavsett vilket x man väljer!