MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV205, 2006-03-10.
Tentamen i Matematik IT del B, TMA245b, 2006-03-10.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Oscar Marmon, 0762-721860.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. Betrakta ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

   (a) För vilka värden på a har ekvationssystemet ingen lösning?
   (b) För vilka värden på a har ekvationssystemet oändligt många lösningar?
   (c) För vilka värden på a har ekvationssystemet unik lösning?

(6p)

2. Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för planet som innehåller punkterna $P_1 = (-1, 0, 1)$, $P_2 = (2, 3, 4)$ och $P_3 = (-2, -1, 1)$. (6p)

3. Vad är avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 9 + 3t. \end{cases}$$

(6p)

4. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ och vektorn } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(6p)

Var god vänd!

5. Ge en matris A som har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 4$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(6p)

6. För vilka vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet gäller det att

   (a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

   (b) $((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

   (Ett villkor i taget. Inte båda tillsammans.) Svaren ska motiveras! (6p)

7. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två ickeparallella vektorer i planet alternativt i rummet. Låt P_1 vara parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som diagonalvektorer och låt P_2 vara parallellogrammen som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som sidor (som spänns upp av dessa). Visa att arean av P_2 är dubbelt så stor som arean av P_1 (både i rummet och i planet). (6p)

8. Låt x vara ett godtyckligt reellt tal. Vi definierar A som den $n \times n$-matris som har elementen $a_{ij} = (x + i + j - 2)^2$.

   (a) Visa att $\det(A) = 0$ om $n \geq 4$.

   (b) Visa att $\det(A) = 0$ inte alltid gäller om $n = 3$. (I själva verket gäller det aldrig, men du behöver inte visa detta. Fast en liten guldstjärna i kanten blir det.)

   (8p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 24/3. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.