Determinanter

Vi ska nu definiera determinant för godtyckligt stora kvadratiska matriser. Vi ger en 'konceptuell' definition som inte ger någon formel för att räkna ut den utan bara vilka egenskaper vi vill att den ska ha.

Definition 1 *En* **determinant** *är en funktion som till varje kvadratisk matris A ordnar ett tal*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

med följande egenskaper:

1. *Determinanten är en linjär funktion av varje kolonn.*
2. *Om två kolonner är lika så är determinanten noll.*
3. *Determinanten av identitetsmatrisen är ett.*

Anmärkning 1 *För att definitionen ska vara meningsfull måste man visa att determinanten existerar och att den är unik vilket inte är helt enkelt.*

Vi ska utifrån definitionen nu härleda ett effektivt sätt att beräkna determinanten.

Definition 2 *Vi definierar de* **elementära radoperationerna** *att vara följande tre typer:*

1. *Byte av två rader.*
2. *Multiplikation av en rad med ett tal skilt från noll.*
3. *Addition av en multipel av en rad till en annan rad.*

Från definitionen av determinant får vi direkt att determinanten inte alls påverkas av den tredje typen av elementära radoperationer och att den multipliceras med det aktuella talet för den andra typen. Om man byter två rader så ändras tecknet på determinanten. Det får man nästan omedelbart från definitionen (se bevis i avsnitt 4.1 i boken). Vi har alltså full kontroll på vad som händer med determinanten om man utför en elementär radoperation på en matris.
Man kan med viss möda bevisa att determinanten inte ändras om man transponerar matrisen, d v s

$$\det A = \det A^t.$$

Från detta får vi att alla regler som gäller för rader också gäller för kolonner. Man kan t ex addera en multipel av en kolonn till en annan kolonn utan att ändra determinanten.
Nu ska vi formulera två resultat som ger ett sätt att beräkna determinanten m h a elementära radoperationer. (Ett bevis i fallet $n = 3$ av följande sats finns i boken i avsnitt 4.3.)

Sats 1 *Antag att A är en övertriangulär (eller undertriangulär) matris med diagonalelement a_{ii}. Då gäller att*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Det är alltså enkelt att direkt beräkna determinanten för en triangulär matris. För en godtycklig matris gäller det helt enkelt att överföra den till en triangulär matris med hjälp av elementära radoperationer och om vi noterar vilka radoperationer vi gör så kan man då beräkna determinanten för en godtycklig (kvadratisk) matris. Man kan ju nu fråga sig om denna metod alltid lyckas, och det gör den:

Sats 2 *Varje $n \times n$-matris kan överföras till en övertriangulär matris m h a elementära radoperationer.*

Bevis. Vi gör ett induktionsbevis över n. För basfallet antag att $n = 2$ och att

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Om $a = 0$ så byt de två raderna och saken är klar. Om $a \neq 0$, så addera $-(c/a)$ gånger första raden till den andra. Då får vi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - bc/a \end{pmatrix}$$

och därmed är saken klar.
Antag nu att påståendet är sant för alla matriser av storlek $(n-1) \times (n-1)$. Vi ska visa att i så fall gäller det också för $n \times n$-matriser. Låt A vara en godtycklig $n \times n$-matris. Det räcker att visa att vi kan få hela första kolonnen utom första elementet till nollor, ty betrakta den del av matrisen A som består av de $n-1$ sista kolonnerna och de $n-1$ sista raderna. Denna kan överföras till en övertriangulär matris enligt induktionsantagandet och därmed kan även A det (eftersom vi hade nollor i första kolonnen förutom första elementet).
Om alla element i första kolonnen redan är noll så är saken klar. Antag nu att åtminstone ett av dem är skilt från noll. Byt eventuellt rader så att $a_{11} \neq 0$. Om man sedan adderar $-(a_{i1}/a_{11})$ gånger rad 1 till rad i för alla $2 \leq i \leq n$ så kommer raderna att få en nolla i första platsen och därmed är saken klar. □

Exempel 1 *Vi använder dessa satser för att beräkna*

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix}$$

Vi använder metoden att addera en lämplig multipel av en rad som vi utnyttjade i beviset av förra satsen och får

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & 24 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 20 = 180.$$