Linjära ekvationssystem

En **linjär ekvation** i n obekanta $x_1, x_2, \dots, x_n$ är en ekvation på formen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,$$

där a_i och b är fixa tal. Ett **linjärt ekvationssystem** med m ekvationer och n obekanta är helt enkelt m stycken sådana ekvationer och en lösning till ett sådant system är en n-tipel som satisfierar alla ekvationerna.
Titta t ex på det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ \phantom{x + {}} 3y - 8z = 14 \\ \phantom{x + 3y - {}} 20z = 40 \end{cases}$$

Vi kan kort skriva detta som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A kallas för **koefficientmatris** och $\mathbf{b}$ kallas för **högerledsvektor**.
Eftersom den sista ekvationen bara innehåller z så får vi från denna att $z = 2$. Sätter vi nu in detta i den andra ekvationen (som bara innehåller y och z) så får vi $3y = 14 + 16$, d v s $y = 10$. Om vi nu sätter in dessa värden i första ekvationen så får vi $x = 12 - 2 \cdot 10 - 3 \cdot 2 = -14$. Att det blev så här enkelt att bara successivt substiuera de olika variablerna hänger samman med att koefficientmatrisen är triangulär. Detta förfarande brukar kallas för **bakåtsubstitution**.
Antag nu att koefficientmatrisen inte är triangulär. Vi vet att vi kan göra den övertriangulär m h a elementära radoperationer och det härliga är att dessa inte ändrar lösningsmängden om man inkluderar högerledsvektorn som en extra kolonn. (Detta brukar kallas för **totalmatrisen**.) Att byta två rader har uppenbarligen ingen effekt och att multiplicera en rad med ett tal skilt från noll svarar enbart mot att multiplicera båda leden med talet (eftersom vi inkluderat högerledet som en extra kolonn). För den tredje elementära radoperatorn att addera en multipel av en rad till en annan så antag att

$$E_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0$$

och

$$E_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0$$

är två linjära ekvationer Vi ska visa att

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \end{cases} \text{och} \begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 + kE_1 = 0 \end{cases}$$

har samma lösningar. Om det första ekvationssystemet är uppfyllt så är uppenbarligen det andra också det. Antag nu att det andra är det. Eftersom $E_1 = 0$ så får vi $E_2 = -kE_1 = 0$ så alltså är också det första systemet uppfyllt och därmed är saken klar. Vi har alltså visat att de elementära radoperationerna inte ändrar lösningsmängden.

Exempel 1 *Betrakta ekvationssystemet*

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 36 \\ 2x + 7y - 2z = 38 \\ 4x + 11y + 24z = 102. \end{cases}.$$

Vi får koefficientmatrisen utvidgad med högerledsvektorn till

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 36 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix}.$$

Med elementära radoperationer så får vi

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 36 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 7 & -2 & 38 \\ 4 & 11 & 24 & 102 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 12 & 54 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Detta triangulära system har vi redan löst m h a bakåtsubstitution och vi får $z = 2$, $y = 10$ *och* $x = -14$.

Detta sätt att överföra totalmatrisen till en övertriangulär matris och sedan bakåtsubstituera kallas för **Gausselimination**.
Om vi är i tre dimensioner så är en linjär ekvation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

ekvationen för ett plan. Man kan då se lösningarna till ett ekvationssystem med tre ekvationer som skärningspunkterna mellan tre plan. Som vi såg på gruppövningen (alternativt titta i avsnitt 5.1.1 i boken) kan denna skärning vara ingenting, en punkt, en linje eller ett helt plan. Det är alltså inte alltid som i exemplet att man får en enda unik lösning. Observera dock att om alla element på diagonalen i den triangulära matrisen är skilda från noll så får vi en unik lösning från bakåtsubstitutionen för i varje steg bestäms nästa variabel unikt. Eftersom alla element på diagonalen är skilda från noll om och endast om determinanten för koefficientmatrisen A är skild från noll (Varför?) så får vi en unik lösning om $\det A \neq 0$.
Vad händer om $\det A = 0$? Vi tittar på följande exempel:

Exempel 2 *Betrakta totalmatrisen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & a & 4 \end{pmatrix},$$

där a är något tal. Vi ser här att koefficientmatrisen A har $\det A = 0$ *eftersom de två första kolonnerna är en multipel av varandra. Om vi utför Gausselimination så får vi*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & a & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a-9 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & a-9 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1+(a-9)/3 \end{pmatrix}.$$

Den sista ekvationen är nu $0 = 1 + (a - 9)/3$ *som har lösning om och endast om konstanten* $a = 3$. *Det finns alltså bara lösning om* $a = 3$. *Antag nu* $a = 3$. *Då får vi*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $x_3 = -1/3$. *Sedan får vi inget villkor på* x_2 *eftersom vi har en nolla i andra diagonalelementet. Då är* x_2 *vad man brukar kalla en* **fri** *variabel och vi kan sätta* $x_2 = t$ *där* t *är en parameter. Den första ekvationen ger då* $x_1 = 1 - 2t - 3 \cdot (-1/3) = 2 - 2t$ *och vi får lösningen*

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = -1/3, \end{cases}$$

vilket är ekvationen för en linje på parameterform.

Vi såg i exemplet att vi fick antingen ingen eller oändligt många lösningar om $\det A = 0$. Man kan generalisera vårt resonemang och i allmänhet har vi följande viktiga resultat.

Sats 1 *Ett kvadratiskt ekvationssystem med koefficientmatris* A *har en unik lösning om och endast om* $\det A \neq 0$. *Om* $\det A = 0$ *så finns det antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar.*