MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2008-08-27.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Lindgren, 0762-721860.

OBS: Ange personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. Bestäm en ekvation (på parameterfri form) för planet som innehåller punkterna $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (4, 5, 6)$ och $P_3 = (0, 1, 3)$. (6p)

2. Vad är vinkeln mellan vektorerna $(1\ 3\ 2)^t$ och $(3\ 2\ -1)^t$? (6p)

3. Avgör om vektorn $\mathbf{w} = (3\ 4\ 2)^t$ är en linjärkombination av de tre vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1\ 2\ 2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (2\ 2\ 5)^t$ och $\mathbf{v}_3 = (-1\ -1\ 2)^t$. Om så är fallet, så ange koefficienterna för en sådan linjärkombination. (6p)

4. Bestäm avståndet från punkten $(2, 3, -1)$ till linjen

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

(6p)

5. Låt C och D vara två stycken $m \times n$-matriser, A en inverterbar $m \times m$-matris och B en inverterbar $n \times n$-matris. Visa att det i så fall finns en unik $m \times n$-matris X som löser matrisekvationen $AXB + C = D$ och ange en formel för X. (6p)

6. Låt L vara linjen genom origo i $\mathbb{R}^3$ som har riktningsvektor $(1\ 1\ 1)^t$ och låt A vara matrisen för den linjära avbildning som svarar mot en rotation $\pi/2$ radianer moturs kring L. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer för matrisen A. Motivera ditt svar väl. Tips: Inga räkningar behövs. (6p)

Var god vänd!

7. Betrakta ON-basen $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$, där

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}.$$

Låt L vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

(a) Bestäm matrisen för L i basen F.

(b) Bestäm matrisen för L i standardbasen.

(8p)

8. Vi definierar tvånormen av en matris A, $||A||_2$, som roten ur summan av kvadraten av alla element i A. Med andra ord får vi t ex för en 2×2-matris att om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ så är } ||A||_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Låt nu A vara en 2×2-matris med två olika egenvärden λ_1 och λ_2. Antag att $|\lambda_1| < 1$ och $|\lambda_2| < 1$. Bevisa att i så fall är

$$\lim_{n \to \infty} ||A^n||_2 = 0.$$

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 10 september. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.