MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2008-08-27.
Lösningar

1. Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in t ex punkten P_3 och får $-1 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y + 1 = 0.$$

2. Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som ger att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|},$$

där α är (minsta) vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. I vårt fall så får vi

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}.$$

Alltså är den sökta vinkeln $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \pi/3$.

3. Vi ansätter en linjärkombination $\mathbf{w} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Det ger ett linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot4/9 = 1$ så $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \frac{4}{9}\mathbf{v}_2 - \frac{10}{9}\mathbf{v}_3$.

4. Låt $Q = (3,3,2)$. Då är Q en punkt på linjen. Om $\overrightarrow{QP}_L$ är ortogonala projektionen av $\overrightarrow{QP}$ på linjen så ges avståndet d från P till linjen av

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2}.$$

Vektorn $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normaliserad riktningsvektor för linjen. Vi har att

$$\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|(-1\ 0\ -3)^t\right|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

och

$$\left|\overrightarrow{QP}_L\right|^2 = \left|(\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right|^2 = \left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left|-10/\sqrt{14}\right|^2 = 50/7.$$

Alltså är det sökta avståndet $d = \sqrt{10 - 50/7} = \sqrt{20/7}$.

5. Vi subtraherar C ifrån båda leden och får då $AXB = D - C$. Eftersom både A och B är inverterbara så kan vi multiplicera båda leden med dessa matrisers respektive inverser ifrån vänster respektive höger vilket ger

$$\begin{aligned} AXB = D - C \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}(D-C)B^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}(D-C)B^{-1}. \end{aligned}$$

Alltså är $X = A^{-1}(D-C)B^{-1}$ en unik lösning till ekvationen.

6. Vektorer som är parallella med L kommer att vara oförändrade, vilket betyder att dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. En vektor som inte är parallell med L kommer däremot aldrig att ha samma riktning efter rotationen och inte heller motsatt riktning (vinkeln mellan den ursprungliga vektorn och dess rotation kommer att ligga i intervallet $(0, \pi/2]$). Alltså har A endast egenvärdet 1 med egenvektorer $s \cdot (1\ 1\ 1)^t$ för godtyckligt $s \in \mathbb{R}$.

7. (a) Basvektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är oförändrade och $\mathbf{f}_3$ avbildas på nollvektorn så matrisen i basen F ges av

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrisen för L i standardbasen ges enligt känd sats av (observera att F är en ON-matris så $F^{-1} = F^t$)

$$\begin{aligned} A &= FA_FF^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 13 & -12 & 18 \\ -12 & 45 & 6 \\ 18 & 6 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Eftersom A är en 2×2-matris med två olika egenvärden så är den diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

är en diagonalmatris. Vi får då att

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ där } D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Eftersom $|\lambda_1| < 1$ och $|\lambda_2| < 1$ så är

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^n = \lim_{n\to\infty} \lambda_2^n = 0.$$

Därmed kommer D^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten och eftersom P är en konstant matris så kommer också A^n att närma sig nollmatrisen när n växer mot oändligheten. Det betyder att alla elementen i A^n närmar sig 0 och därmed att

$$\lim_{n\to\infty} ||A^n||_2 = 0.$$