MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2008-03-15.
Lösningar

1. Parametriseringen av de två linjerna ser ut så här:

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}\ och\ \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}.$$

Sätter man dessa lika varandra så får man matrisekvationen

$$\begin{pmatrix}6&-4\\-2&-2\\4&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Gausselimination ger efter att vi först multiplicerat den andra och tredje ekvationen med $-1/2$ och ändrat ordning på ekvaktionerna att

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\6&-4&1\\2&-4&-1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-10&-5\\0&-6&-3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Det ger lösningen $s=t=1/2$ vilket i sin tur ger skärningspunkten $P=(1,2,3)$.

2. Vi beräknar determinaten för matrisen som har vektorerna som kolumner. Dessa är linjärt oberoende om och endast om denna determinant är skild ifrån 0.

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-2&13\\-1&4&-11\end{vmatrix}=(22-52)-2(-33+13)-(12-2)=-30+40-10=0.$$

Alltså är vektorerna **inte** linjärt oberoende.

3. Låt Q vara punkten på planet som ligger närmast P. Vi har att $\overrightarrow{PQ}$ är en normal till planet så $Q=(1+2t,4+t,2+4t)$ för något t. Vi sätter in detta i planets ekvation (Q ligger ju på planet) och får ekvationen

$$0=2(1+2t)+(4+t)+4(2+4t)+3=17+21t,$$

vilket har lösningen $t=-17/21$. Det ger att avståndet är

$$|\overrightarrow{PQ}|=|t(2\ 1\ 4)^t|=\frac{17}{21}\sqrt{4+1+16}=\frac{17}{\sqrt{21}}.$$

4. Matrisen för den ortogonala projektionen i ON-basen

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \ \text{är } P_F = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Det ger att om $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2)$ så är matrisen i standardbasen

$$P = FP_FF^{-1} = FP_FP^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}.$$

Matrisen för rotationen är (observera att det är medurs)

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix},$$

så den totala matrisen blir

$$M = RP = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

5. Vi har att $\cos 60 = 1/2$ så enligt definitionen av skalärprodukt så har vi

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{2|\mathbf{w}|} \iff 1 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}.$$

Man kan ansätta en godtycklig vektor och se vad villkoren blir, men kanske ser man direkt att t ex både $\mathbf{w} = (1\ 0\ 0)$ och $\mathbf{w} = (0\ 1\ 0)$ löser ekvationen.

6. Vi sätter egenvärdena på diagonalen i en diagonalmatris D och motsvarande (normaliserade) egenvektorer i kolumnerna på matrisen V och en matris som uppfyller kraven blir då $A = VDV^{-1}$. Observera att V då blir en ON-matris så att inversen är lika med transponatet. Vi får t ex

$$A = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0\\2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0\\-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5 & 4/5 & 0\\4/5 & 3/5 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

7. (a) Vi har att

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

och

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

Dessa är lika om och endast om $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, d v s om och endast om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är ortogonala.

(b) Vektorerna $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ är diagonalerna i parallellogrammet som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Alltså är diagonalerna lika långa om och endast om sidorna är ortogonal, d v s om och endast om parallellogrammet är en rektangel.

8. (a) En direkt kalkyl ger med A som i frågan att

$$A^2 - sp(A)A + det(A)I =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & b(a+d)-(a+d)b \\ c(a+d)-(a+d)c & d^2+bc-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Vi vet från första deluppgiften att om $det(A) = 0$ så gäller att $A^2 = sp(A)A$. Rekursivt får vi nu att

$$A^3 = A^2 \cdot A = sp(A)A \cdot A = sp(A)A^2 = sp(A)^2 A,$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = sp(A)^2 A \cdot A = sp(A)^2 A^2 = sp(A)^3 A$$

etc. Det känns som om $A^n = sp(A)^{n-1}A$ är en inte alltför vild gissning. Vi verifierar med ett enkelt induktionsbevis.

Basfall för $n = 1, 2, 3$ och 4 är klara.

Antag att påståendet sant för något k och visa att i så fall är det sant också för $k+1$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = sp(A)^{k-1}A \cdot A = sp(A)^{k-1}sp(A)A = sp(A)^k A$$

och därmed är saken klar.

Vi har alltså visat påståendet som efterfrågades med $k_n = sp(A)^{n-1}$.