MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2009-01-13.
Lösningar

1. Två vektorer i planet är $\overrightarrow{PQ} = (1\ 2\ 0)$ och $\overrightarrow{PR} = (3\ 0\ 1)$. En normal till planet är vektorprodukten av dessa

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Vi får att ekvationen är på formen $2x-y-6z+d=0$ och genom att sätta in P får vi $2-1-6+d=0$ så $d=5$. Ekvationen blir alltså $2x-y-6z+5=0$.

2. (a) Man kan t ex ta vilka två kolumner som helst i A.

   (b) Gausselimination ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

varifrån vi ser att det finns vektorer $\mathbf{c}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ saknar lösning. (I själva verket gäller det för alla vektorer utom det plan som spänns upp av två av kolumnerna i A.) Ett exempel är $\mathbf{c} = (0\ 0\ 1)^t$ då vi ser att denna inte kommer att påverkas av Gausseliminationen och sista ekvationen blir då $0 = 1$.

3. Om R är matrisen för rotationen och S är matrisen för speglingen så är den sökta matrisen $M = SR$. Vi har att rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Speglingen avbildar $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ på $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ och vice versa så

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det ger att den sökta matrisen är

$$M = SR = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

4. (a) En riktningsvektor ges av

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-4t \\ z = 4+t \end{cases}$$

är en ekvation för linjen.

(b) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen och om vi tar ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ så ligger linjen på detta om och endast om

$$0 = A(1+t)+B(3-4t)+C(4+t)+D = (A+3B+4C+D)+(A-4B+C)t$$

för alla t. Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ A - 4B + C = 0 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med (vi subtraherar den första ekvationen från den andra)

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ -7B - 3C = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningarna $D = s$, $C = 7t$, $B = -3t$ och $A = -19t - s$ där s och t är fria parametrar. Ett exempel får vi om vi sätter $s = 1$ och $t = 0$:

$$-x + 1 = 0.$$

5. Vi ser att planens normaler $(4\ 2\ 8)^t$ respektive $(2\ 1\ 4)^t$ är parallella och därmed är planen parallella och skär alltså inte varann. Avståndet mellan planen är samma överallt och vi kan beräkna det genom att ta en punkt på det första planet, t ex $P = (1, 4, 2)$ och beräkna avståndet ifrån den till det andra planet.

   Låt Q vara punkten på det andra planet som ligger närmast P. Vi har att $\overrightarrow{PQ}$ är en normal till planet så $Q = (1 + 2t, 4 + t, 2 + 4t)$ för något t. Vi sätter in detta i planets ekvation (Q ligger ju på planet) och får ekvationen

$$0 = 2(1 + 2t) + (4 + t) + 4(2 + 4t) + 3 = 17 + 21t,$$

   vilket har lösningen $t = -17/21$. Det ger att avståndet är

$$|\overrightarrow{PQ}| = |t(2\ 1\ 4)^t| = \frac{17}{21}\sqrt{4 + 1 + 16} = \frac{17}{\sqrt{21}}.$$

6. Ett alternativ är (förstås) nollmatrisen som har alla vektorer som egenvektorer med egenvärdet 0. Allmänt så ska den karakteristiska ekvationen ha 0 som dubbelrot. Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   så är karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

   Vi ska alltså ha $a + d = 0$ och $ad - bc = 0$. Den första ger $a = -d$ som insatt i den andra ger $d^2 = -bc$. En möjlighet är $d = b = 1$ och $a = c = -1$, d v s

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Basvektorerna $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ är opåverkade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_z$, så matrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta är en diagonalmatris och determinanten är därmed produkten av elementen på diagonalen som ju blir precis -1.

(b) Determinanten är multiplikativ och $\det M = 1/\det M^{-1}$ för alla inverterbara matriser M så

$$\det B = \det(PCP^{-1}) = \det P \det C \det P^{-1} = \det P \det C / \det P = \det C.$$

(c) Låt F vara en ON-bas vars två första vektorer spänner upp planet som man speglar i. Då är speglingens matris i basen F inget annat än

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

precis som i första deluppgiften. Speglingens matris A i standardbasen ges då enligt känd sats av

$$A = FA_FF^{-1}.$$

Enligt andra deluppgiften är därmed

$$\det A = \det A_F = -1.$$

8. (a) Eftersom determinaten är skild ifrån 0 så existerar inversen och om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

så är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

och alltså har även A^{-1} heltalselement och eftersom

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$$

så ligger A^{-1} i M.

(b) Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} och B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

så är

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Det ger att

$$f_{AB}(x) = \frac{(ae + bg)x + (af + bh)}{(ce + dg)x + (cf + dh)}.$$

Å andra sidan så ges sammansättningen av

$$\begin{aligned} f_A \circ f_B(x) &= f_A\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+b}{c\left(\frac{ex+f}{gx+h}\right)+d} \\ &= \frac{a(ex+f)+b(gx+h)}{c(ex+f)+d(gx+h)} = \frac{(ae+bg)x+(af+bh)}{(ce+dg)x+(cf+dh)}. \end{aligned}$$

Vi ser därmed att de två funktionerna stämmer överens.