MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2008-03-15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jonatan Vasilis, 0762-721860.

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng.

---

1. En linje L_1 innehåller punkterna $P_1 = (-1, 1, -1)$ och $P_2 = (3, 3, 7)$ och en annan linje L_2 innehåller punkterna $P_3 = (-2, 3, 1)$ och $P_4 = (4, 1, 5)$. Avgör om L_1 och L_2 skär varandra och bestäm i så fall skärningspunkten. (6p)

2. Är vektorerna
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix}$$
linjärt oberoende? Motivera ditt svar väl. (6p)

3. Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 4, 2)$ till planet $2x + y + 4z + 3 = 0$. (6p)

4. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen i planet som består av ortogonal projektion på linjen $y = 2x$ följt av rotation kring origo 45 grader **medurs**. (7p)

5. Låt $\mathbf{v} = (1\ 1\ \sqrt{2})^t$. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ sådan att vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är 60 grader. (6p)

6. Bestäm en matris som har egenvärdena 1, -1 och 2 samt egenvektorerna
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
(6p)

Var god vänd!

7. Låt **a** och **b** vara två godtyckliga vektorer.

   (a) Visa att $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ har samma längd om och endast om **a** och **b** är ortogonala.

   (b) Översätt detta till ett geometriskt påstående om diagonalerna i ett parallellogram.

(7p)

8. Spåret av en matris är summan av elementen på diagonalen. Vi betecknar spåret av en matris A med $sp(A)$, så speciellt för en 2×2-matris har vi att

$$sp(A) = a + d, \text{ om } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vi betecknar (som vanligt) determinanten av matrisen A med $det(A)$. Låt A vara en 2×2-matris.

   (a) Visa att
   $$A^2 - sp(A)A + det(A)I = 0,$$
   där I är identitetsmatrisen och 0 (förstås) är en nollmatris.

   (b) Antag att $det(A) = 0$. Visa att i så fall är varje potens A^n med $n \in \mathbb{Z}_+$ en multipel av A, d v s $A^n = k_n A$ där $k_n \in \mathbb{R}$, samt bestäm k_n för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 1 april (jag skämtar inte). Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.