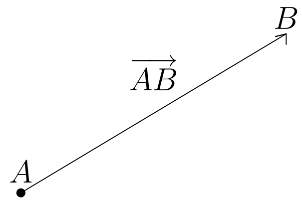
Geometriska vektorer

De begrepp som linjär algebra kretsar kring är vektorer och matriser. Dessa svarar mot datorernas fält (='array') av dimension ett respektive två. Men vi börjar med att betrakta vektorer som geometriska objekt i rummet för att skapa oss en bild av det mer abstrakta begreppet.

Definition 1 *En (geometrisk)* **vektor** *i rummet är ett objekt med egenskaperna längd och riktning. Undantag är vektorn av längd* 0 *som kallas* **nollvektorn**, *betecknas med* $\mathbf{0}$ *och saknar riktning.* **Längden** *av en vektor* $\mathbf{v}$ *betecknas med* $|\mathbf{v}|$.

Exempel 1 *Det finns många storheter inom fysiken som beskrivs lämpligt av en vektor. Ett exempel är hastigheten. I det fallet är längden av vektorn inget annat än farten. Man illustrerar oftast en vektor som en pil och om A och B är två punkter så betecknar $\overrightarrow{AB}$ vektorn från A till B.*



Vi säger att två **vektorer är lika** om de har samma riktning och samma längd. Man tar alltså inte hänsyn till var i rummet de två vektorerna befinner sig när man jämför dem.

Definition 2 *Låt $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{v}$ en vektor.* **Produkten** $c\mathbf{v}$ *mellan c och $\mathbf{v}$ definieras som den vektor som uppfyller:*

1. $|c\mathbf{v}| = |c||\mathbf{v}|$.

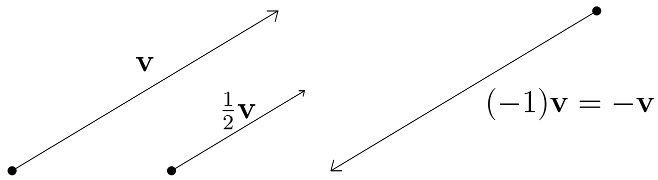
2. *Om $c > 0$ så har $\mathbf{v}$ och $c\mathbf{v}$ samma riktning.*

3. *Om $c < 0$ så har $\mathbf{v}$ och $c\mathbf{v}$ motsatt riktning.*

Exempel 2 *Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor med positiv längd. Sätt $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$. Då pekar $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i samma riktning och*

$$|\mathbf{w}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\right| |\mathbf{v}| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1.$$

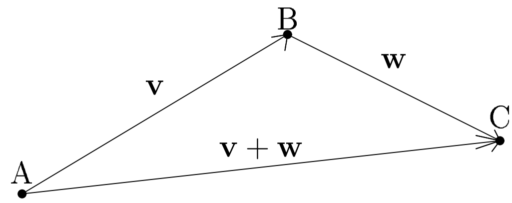
Som synes kan man på detta sätt alltid konstruera en vektor av längd 1 som har samma riktning som en given vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Detta är något ni kommer att göra många gånger så lägg detta exempel på minnet. En vektor av längd 1 kallas för en **enhetsvektor**. Grafiskt exempel på en vektor multiplicerad med reella tal:



Definition 3 *Låt* $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *vara två vektorer. Antag att* $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ *och låt* $\mathbf{w}$ *börja i* B *så att* $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$ *för någon punkt* C*.* **Summan av vektorerna** $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *definieras då som*

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}.$$

Grafiskt blir detta:



Observera att villkoret att $\mathbf{w}$ börjar i B inte är någon inskränkning. Givet en godtycklig vektor kan man ju alltid anta att den börjar i en given punkt eftersom det bara är längd och riktning som har betydelse. Kom ihåg definitionen av när två vektorer är lika.
Produkt med skalär (reellt tal) och addition av vektorer följer de regler som man är van vid ska gälla för addition och multiplikation. Bland annat så gäller för $c, d \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vektorer att:

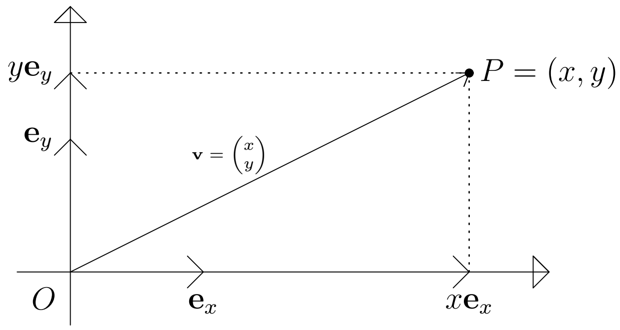
1. $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$.
2. $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.
3. $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$.
4. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
5. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

För att lättare kunna räkna med vektorer så inför vi **koordinatsystem** på följande sätt. Fixera en punkt O som vi kallar origo. Dra två ortogonala (vinkelräta) enhetsvektorer $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ från origo. Låt riktningen för $\mathbf{e}_x$ vara x-axeln och riktningen för $\mathbf{e}_y$ vara y-axeln. Flytta en vektor $\mathbf{v}$ så att den börjar i origo och slutar i en punkt $P = (x, y)$ där koordinaterna är de i koordinatsystemet som bestäms av $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$. Per definition får vi då att

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Paret x och y kallas för $\mathbf{v}$:s **koordinater i basen** $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ och vi inför beteckningen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Anmärkning 1 *Man kan tänka sig att man väljer basvektorer som inte har längd* 1 *och/eller inte är ortogonala. Det är dock för det mesta praktiskt att hålla sig till ortogonala baselement av längd* 1*. En bas som uppfyller detta kallas för en* **ortonormerad bas** *eller kortare* **ON-bas**.

Anmärkning 2 *I rummet så får man* 3 *stycken basvektorer. I övrigt är allt likadant (förutom att det blir lite svårare att visualisera på ett platt papper).*

Följande räkneregler är inte så svåra att verifiera geometriskt (vilket Du uppmanas att göra på egen hand):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\\ c\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}cx\\cy\end{pmatrix}\\ \left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right| &= \sqrt{x^2+y^2}\quad\text{(Pythagoras sats).}\end{aligned}$$

De två första kan man ännu lättare bevisa direkt med hjälp av definitionen och tidigare räkneregler. Den andra likheten t ex följer av

$$c\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y) = c(x\mathbf{e}_x)+c(y\mathbf{e}_y) = (cx)\mathbf{e}_x+(cy)\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix}cx\\cy\end{pmatrix}.$$

Matriser

Definition 4 *En (reellvärd)* **matris** *är ett tvådimensionellt fält med reella tal. En matris sägs vara av* **typ** $m\times n$ *om den har* m *rader och* n *kolumner.*

Exempel 3 *En* 3×3*-matris* A *ser ut som*

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

där $a_{ij}\in\mathbb{R}$*. Observera att det första indexet,* i*, svarar mot raden och det andra,* j*, mot kolumnen.*

Definition 5 *Låt* A *och* B *vara två matriser av samma typ. Vi definierar* **summan av matriserna** A *och* B*,* $C = A+B$*, genom* $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$*, där* c_{ij} *är element* (i,j) *i* C *och motsvarande för* A *och* B*.*

Exempel 4 *Med andra ord så är matrisaddition helt enkelt bara att man adderar motsvarande element med varandra:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 3 *Observera att man inte kan addera matriser av olika typ.*

Definition 6 *Låt A vara en matris och låt $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi definierar* **produkten av** *A och λ, $C = \lambda A = A\lambda$, genom $c_{ij} = \lambda a_{ij} = a_{ij}\lambda$, där c_{ij} är element (i,j) i C och motsvarande för A.*

Exempel 5 *För en 2×2-matris får vi*

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 & 7 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}.$$

Definition 7 *Låt A och B vara två matriser av typ $m \times n$ respektive $n \times p$. Vi definierar* **produkten av matriserna** *A och B, $C = AB$, genom*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{för } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p,$$

där c_{ij} är element (i,j) i C och motsvarande för A och B.

Exempel 6 *Definitionen kan verka lite omotiverad och konstlad vid en första anblick, men som vi kommer att se är den väldigt naturlig och har trevliga egenskaper. För 2×2-matriser får vi:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \\ 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 & 9 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 46 \\ 39 & 58 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 4 *Observera att A måste ha lika många kolumner som B har rader för att man ska kunna utföra multiplikationen AB. Från definitionen följer det också att AB har lika många rader som A och lika många kolumner som B.*

Som man såg av exemplet så behöver det inte vara så att $AB = BA$, matrismultiplikation är alltså inte kommutativ. (Det kan ju t o m vara så att bara en av dem är definierad alternativt att de är av olika typ.) Det är alltså väldigt viktigt att hålla reda på ordningen när man multiplicerar matriser. Däremot uppfyller matrismultiplikationen ett antal andra trevliga räkneregler varav de viktigaste är

- A(BC)=(AB)C
- A(B+C)=AB+AC

- (B+C)A=BA+CA
- A(cB)=c(AB)=(cA)B,

där $c \in \mathbb{R}$. Den första av dessa regler säger att den är associativ (det spelar ingen roll var man börjar multiplicera) vilket är långt ifrån uppenbart från definitionen och oerhört viktig för att multiplikationen ska vara användbar. Man skulle givetvis kunna definiera en multiplikation elementvis i analogi med definitionen för addition, men denna operation är inte alls lika användbar som den vi just definierat.

Definition 8 *Låt A vara en matris av typ $m \times n$. Vi definierar* **transponatet av** *A, A^t, som den matris av typ $n \times m$ som har elementen*

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad \text{för } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

där a^t_{ij} är element (i,j) i A^t.

Annorlunda uttryckt kan man helt enkelt säga att raderna i A blir kolumner i A^t.

Exempel 7 *För en 3×3-matris*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

får vi

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Linjära avbildningar

Vi kommer i detta avsnitt för enkelhets skull att inskränka oss till 2×2-matriser, men det går att göra alla definitioner mycket mer generella och vi återkommer till detta senare i kursen. Det kommer att talas om avbildningar och en synonym till avbildningar är funktioner. När det gäller så kallade linjära avbildningar (funktioner) använder man dock av tradition termen avbildningar.
En vektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ kan betraktas som en 2×1-matris och vi kan då t ex multiplicera en 2×2-matris med en vektor:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Resultatet blir som synes en ny vektor. Utgående från detta gör vi följande definition.

Definition 9 *Fixera en* 2×2*-matris* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. **Matrisavbildningen m a p** A *definieras då som*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Detta ger en avbildning från mängden av vektorer till sig själv.

Exempel 8 *Låt* $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. *Då är*

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

så A *dubblar längden och bevarar riktningen av alla vektorer.*

Definition 10 *Låt* V *vara mängden av alla vektorer. En avbildning säges vara* **linjär** *om*

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), & \textit{för alla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ f(c\mathbf{v}) = c \cdot f(\mathbf{v}), & \textit{för alla } \mathbf{v} \in V \textit{ och } c \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exempel 9 *Sätt* $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$. *Då är*

$$\begin{cases} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \\ f(c\mathbf{v}) = 2(c\mathbf{v}) = (2c)\mathbf{v} = (c \cdot 2)\mathbf{v} = c(2\mathbf{v}) = c \cdot f(\mathbf{v}), \end{cases}$$

så f *är linjär.*

Exempel 10 *Definiera nu* g *som* $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$. *Då är*

$$g\left(c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c^2 x^2 \\ c^2 y^2 \end{pmatrix} = c^2 \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = c^2 \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

vilket inte är lika med $c \cdot g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ *(förutom då* $c = 0$ *eller* $c = 1$*). Alltså är* g *INTE linjär.*

Vi såg här att funktionen som dubblar en vektor är både en linjär avbildning och en matrisavbildning. I själva verket är begreppen matrisavbildning och linjär avbildning ekvivalenta (och i fortsättningen kommer vi att kalla dem för linjära avbildningar):

Sats 1 *Varje matrisavbildning är linjär och omvänt är varje linjär avbildning en matrisavbildning.*

Bevis. Vi visar först att en matrisavbildning är linjär. Låt f vara en matrisavbildning m a p A, d v s $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Då får vi enligt räknereglerna för matriser att

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

och

$$f(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u}).$$

Alltså är f linjär.
Ett bevis av omvändningen, d v s att varje linjär avbildning är en matrisavbildning får man från nästa sats som dessutom ger ett recept att få fram matrisen.

$\square$

En naturlig fråga man ofta ställs inför är att hitta matrisen som svarar mot en given linjär avbildning. Ett svar hur man kan göra finns i följande enkla och användbara sats.

Sats 2 (Bassatsen) *Om f är en linjär avbildning så ges matrisen för f (i basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$) av*

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_x) & f(\mathbf{e}_y) \end{pmatrix},$$

d v s första kolumnen ges av bilden av $\mathbf{e}_x$ under f och den andra kolumnen av bilden av $\mathbf{e}_y$ under f.

Bevis. Antag att f är en linjär avbildning samt att

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_x) &= a\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{e}_y) &= b\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Låt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ vara en godtycklig vektor. Om vi utnyttjar räknereglerna för matrisoperatorerna och att f är linjär så får vi

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = xf(\mathbf{e}_x) + yf(\mathbf{e}_y) \\ &= x(a\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_y) + y(b\mathbf{e}_x + d\mathbf{e}_y) = (ax+by)\mathbf{e}_x + (cx+dy)\mathbf{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alltså är f en matrisavbildning m a p matrisen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_x) & f(\mathbf{e}_y) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exempel 11 *Låt återigen f vara funktionen som dubblar varje vektor. Vi vet ju redan matrisen, men vi ska illustrera Bassatsen genom att utnyttja denna för att bestämma matrisen. Vi har att*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_x) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(\mathbf{e}_y) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

så matrisen ges av

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_x) & f(\mathbf{e}_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning 5 *Observera att vi alltså kan bestämma matrisen för den linjära avbildningen om vi vet vad den gör med två basvektorer i planet. Vi kommer senare att visa att varje par av vektorer i planet som inte är parallella utgör en bas. Alltså är en linjär avbildning i planet alltid bestämd av vad den gör med två icke-parallella vektorer.*