Linjärkombinationer, baser

Definition 1 *Låt* $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$ *vara två vektorer. En vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ *kallas då för en* **linjärkombination av** $\mathbf{v}_1$ *och* $\mathbf{v}_2$. *Mer allmänt så kallas en vektor* $\mathbf{v}$ *på formen*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i,$$

där $a_i \in \mathbb{R}$ *för en linjärkombination av* $\{\mathbf{v}_i\}$.

Exempel 1 *Låt* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$. *Då är en linjärkombination av* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *en vektor*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vi ser här alltså att varje 2-vektor är en linjärkombination av $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$. *Om vi istället tar* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *i tre dimensioner så får vi*

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alla linjärkombinationer är i det här fallet alltså vektorerna i xy-planet (de som har tredje koordinaten lika med noll).

Definition 2 *Vi säger att vektorerna* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *är* **linjärt oberoende** *om enda lösningen* $\{a_i\}$ *till*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. *Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är* **linjärt beroende**.

Exempel 2 *Vektorerna* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *är linjärt oberoende ty*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

vilket endast har lösningen $a = b = 0$.

Proposition 1 *Två vektorer* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ *är linjärt beroende om och endast om de är parallella.*

Bevis. Antag först att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende, d v s att det finns tal a, b med $(a,b) \neq (0,0)$ sådana att $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Vi kan anta att $a \neq 0$. Det ger

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{b}{a}\mathbf{v}_2$$

och alltså är $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ parallella.
Omvänt så antag att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är parallella. Då är $\mathbf{v}_1 = k\mathbf{v}_2$ för något $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ så

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 - k\mathbf{v}_2$$

vilket visar att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt beroende. □

På samma sätt kan man också visa följande mer generella resultat:

Proposition 2 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.*

Exempel 3 *Tag $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i tre dimensioner. Då är*

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

så $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. Dessutom får vi t ex att

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$$

genom att lösa ut $\mathbf{v}_1$.

Definition 3 *Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ säges utgöra en* **bas** *om varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ på ett unikt sätt. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en bas och*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s **koordinater i basen** *$\{\mathbf{v}_i\}$.*

Exempel 4 *Vi har tidigare infört basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ för alla 2-vektorer och tillhörande koordinatsystem. Men man kan ta vilka två vektorer som helst som är $\neq \mathbf{0}$ och ej parallella och låta dem utgöra en bas. Låt t ex $\mathbf{v} = \binom{2}{1}$ i basen $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Då är*

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{e}_y$$

så i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$ har $\mathbf{v}$ koordinater $(1, 0)$. Vi har också

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y,$$

så $\mathbf{e}_x$ har koordinaterna $(1/2, -1/2)$ i basen $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)$.

Följande proposition ger ett alternativt villkor för en mängd vektorer att utgöra en bas.

Proposition 3 *Vektorerna* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende och varje vektor kan skrivas som en linjärkombination av dem.*

Anmärkning 1 *Vi har tidigare använt begreppet dimension utan att ge någon formell definition. En naturlig definition av begreppet är helt enkelt att låta dimensionen vara antalet element i en bas. Detta stämmer överens med vår intuitiva uppfattning av dimension för planet (som alltså har* 2 *basvektorer) och rummet (som har* 3 *basvektorer).*