Skalärprodukt

Definition 1 *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer och låt* α *vara minsta vinkeln mellan dem. Då definierar vi* **skalärprodukten** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *genom*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cdot\cos\alpha.$$

Exempel 1 *Vi tittar på följande två extrema exempel:*

1. *Låt* $\mathbf{u}$ *vara vilken vektor som helst. Då är*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}|\cdot\cos 0 = |\mathbf{u}|^2.$$

2. *Antag att* $\mathbf{u},\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cdot\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$$

vilket är ekvivalent med att $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är ortogonala (vinkelräta).*

Observera att skalärprodukten av två vektorer är ett reellt tal, inte en vektor. Skalärprodukt är alltså ingen operator på mängden av vektorer. Skalärprodukten uppfyller följande räkneregler:

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.
2. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}),\ c\in\mathbb{R}$.
3. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.

De två första följer direkt från definitionen, men den tredje är ganska komplicerad (se boken sidan 39). Skalärprodukten är enkel att räkna ut om man har vektorerna givna i koordinater m a p en ON-bas:

Sats 1 *Antag att* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* $\binom{x_1}{y_1}$ *respektive* $\binom{x_2}{y_2}$ *i en ON-bas* $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$. *Då gäller att*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Bevis. Vi får m h a räknereglerna ovan och $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1$ och $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0$ att

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2)\cdot(x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2)\\ &= x_1x_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) + y_1x_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1) + y_1y_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2)\\ &= x_1x_2 + y_1y_2.\end{aligned}$$

□

Exempel 2 *Vi vill beräkna vinkeln mellan vektorerna med koordinaterna i någon ON-bas givna av* $\binom{2}{1}$ *respektive* $\binom{3}{4}$.
Från $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cdot\cos\alpha$ *får vi*

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

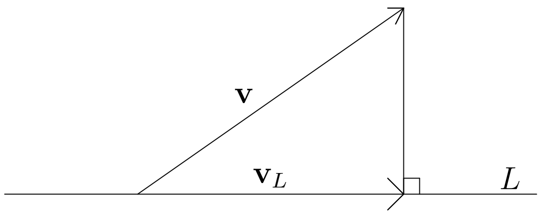
Alltså är $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Anmärkning 1 *Motsvarande resultat gäller i 3 (och även i högre) dimensioner. Det är mycket viktigt att basen är ortonormerad. Titta en gång till på beviset och övertyga dig om detta.*

Det finns ett par typer av linjära avbildningar som är speciellt intressanta och viktiga. En av dessa är vissa projektioner. Vi inleder med att studera (ortogonal) projektion på en linje.

Definition 2 *Låt* $\mathbf{v}$ *vara en vektor och* L *en linje. Den* **ortogonala projektionen** *av* $\mathbf{v}$ *på* L, $\mathbf{v}_L$, *definieras som den vektor som är parallell med* L *och sådan att*

$$\mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = 0.$$



Sats 2 *Låt* $\mathbf{e}$ *vara en enhetsvektor parallell med linjen* L. *Den ortogonala projektionen av* $\mathbf{v}$ *på* L *ges av*

$$\mathbf{v}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}.$$

Bevis. Vi vet att $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e}$ för något $t \in \mathbb{R}$ eftersom $\mathbf{e}$ och $\mathbf{v}_L$ båda är parallella med L. Vidare är $0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L)$ per definition av ortogonal projektion. Vi får

$$0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_L = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot t\mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - t.$$

Alltså är $t = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_L = t\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$. □

Exempel 3 *Bestäm den ortogonala projektionen av en godtycklig vektor* $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ *på linjen parallell med* $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Normering av $\mathbf{v}$ *ger*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Projektionen av en vektor $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ *ges alltså enligt satsen ovan av*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &= \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}\right]\mathbf{e} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser av detta att denna projektion är en linjär avbildning och detta gäller för ortogonala projektioner i allmänhet. (Visa detta genom att imitera det här exemplet med $\mathbf{v}$ *utbytt mot en godtycklig vektor.)*

Sammansättning

Låt f och g vara två linjära avbildningar med motsvarande matriser A och B. Vi får då

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = f(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x},$$

så att sammansättningen är också en linjär avbildning och den har matrisen AB.

Anmärkning 2 *Det faktum att $AB \neq BA$ i allmänhet ger att i allmänhet är $f \circ g \neq g \circ f$.*

Exempel 4 *Låt f och g vara rotation kring origo i planet med s respektive t radianer moturs. Då är deras motsvarande matriser*

$$A = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \text{ respektive } B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen $f \circ g$ ($= g \circ f$) är ju rotation $s + t$ radianer moturs så vi måste ha

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(s+t) & -\sin(s+t) \\ \sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix}.$$

Men samtidigt så får vi genom att multiplicera matriserna att

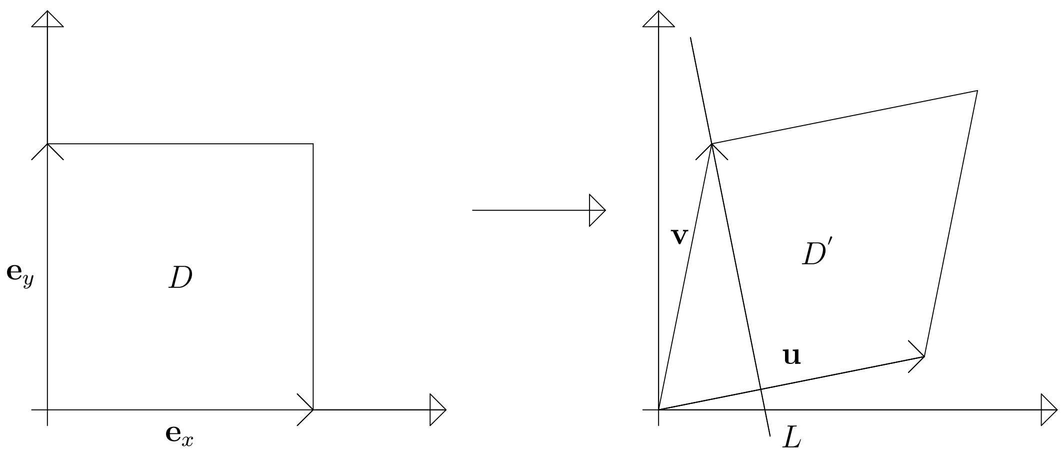
$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s \cos t - \sin s \sin t & -\sin s \cos t - \cos s \sin t \\ \sin s \cos t + \cos s \sin t & \cos s \cos t - \sin s \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Från detta får vi de trigonometriska identiteterna

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

Determinant

Låt $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Betraktad som linjär avbildning så avbildar M enhetskvadraten på en parallellogram som spänns av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$



där $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Arean av parallellogrammen D', $A(D')$, ges av

$$A(D') = |\mathbf{u}||\mathbf{v}_L|$$

där $\mathbf{v}_L$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen L som är ortogonal mot $\mathbf{u}$. En riktningsvektor för L av längd 1 ges av

$$e = \pm\frac{1}{|\mathbf{u}|}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}.$$

(Tecknet beror på 'orienteringen' av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.) Vi får alltså

$$\begin{aligned} A(D') &= |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}_L| = |\mathbf{u}|\,|(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}|\,|\mathbf{e}| \\ &= |\mathbf{u}|\left|\frac{1}{|\mathbf{u}|}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}\right| = |ad - bc|. \end{aligned}$$

Definition 3 *Låt $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Vi definierar då determinanten av M, $\det M$, som*

$$\det M = ad - bc.$$

Vi inför också beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Vad händer om vi istället tar en rektangel med sidorna $s\mathbf{e}_x$ respektive $t\mathbf{e}_y$? Jo bilden kommer då att vara parallellogrammen som spänns upp av $s\mathbf{u}$ och $t\mathbf{v}$. Detta är samma parallellogram man får om man avbildar enhetskvadraten med matrisen $M' = \left(\begin{smallmatrix} sa & tb \\ sc & td \end{smallmatrix}\right)$ så att parallellogrammen kommer att ha arean

$$|\det M'| = |sa\cdot td - tb\cdot sc| = |st|\cdot|ad - bc| = st|\det M|.$$

Vi får alltså

$$\frac{\text{Arean av bilden}}{\text{Arean av rektangeln}} = \frac{|st|\cdot|\det M|}{|st|} = |\det M|.$$

Man kan visa att samma resultat gäller för mer komplicerade områden och vi har följande lite oprecisa sats.

Sats 3 *Antag att D är ett "snällt och hyggligt" område i planet och låt D' vara bilden av D under den linjära avbildningen given av matrisen M. Då gäller att*

$$\frac{\textit{Arean av } D'}{\textit{Arean av } D} = |\det M|.$$

Determinantens absolutbelopp ger alltså areaförändringen hos en linjär avbildning.

Exempel 5 *Låt M vara matrisen för en rotation t radianer moturs. Då får vi med hjälp av definitionen av determinant och trigonometriska ettan att*

$$\det M = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Alltså förändrar en rotation inte arean (precis som vi misstänkte, eller?). Låt nu istället M vara matrisen för skalning med en faktor s. Då är

$$\det M = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2,$$

eller med andra ord så är 'areaskalan kvadraten av längdskalan'.

Följande räkneregler för determinant kan man lätt visa genom direkt räkning.

1. $\det \begin{pmatrix} c\mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$
2. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$
3. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v}+\mathbf{w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$
4. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0$
5. $\det M = \det M^t$

Här betyder $\begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}$ den matris som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som sina kolonner.

Bevis. Som exempel bevisar vi den andra räkneregeln. Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Då är

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad$$

och

$$-\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -(ad - bc) = cb - ad.$$

□

Definition 4 *Determinanten för en 3×3-matris ges av*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

Vi ska senare visa att determinanten för en 3×3-matris spelar samma roll som determinanten för en 2×2-matris. Vi har bl a

Sats 4 *Antag att D är ett "snällt och hyggligt" område i rummet och låt D' vara bilden av D under den linjära avbildningen given av matrisen M. Då gäller att*

$$\frac{\textit{Volymen av } D'}{\textit{Volymen av } D} = |\det M|.$$

Med lite större ansträngning än för 2×2-matriser kan man visa att också determinanten för 3×3-matriser uppfyller räknereglerna ovan. Ett exempel på hur man kan utnyttja dem:

Exempel 6 *Vi använder reglerna* 3. *och* 4. *i följande räkning:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3+2 \\ 4 & 1 & 4+1 \\ 6 & -2 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Mer generellt så antag att 3:e kolonnen är en linjärkombination av de två första. Vi får då på samma sätt som i exemplet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & c\mathbf{u} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & d\mathbf{v} \end{pmatrix} \\ &= c \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{pmatrix} + d \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{v} \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Detta stämmer ju väl överens med satsen om volymförändring, ty om 3:e kolonnen är en linjärkombinaton av de två andra så kommer de att ligga i ett plan och volymen blir därmed 0.

Ett annat sätt att formulera detta på är att tre vektorer i rummet ligger i ett plan om och endast om matrisen med vektorerna som kolonner har determinanten lika med 0.

Satserna om area- respektive volymförändring ger att

$$|\det AB| = |\det A||\det B|,$$

eftersom förändringen för den sammansatta funktionen AB måste vara produkten av de för A och B. Man kan visa (t ex genom direkt räkning) att i själva verket gäller att

$$\det AB = \det A \det B,$$