Linjer, plan m m

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

   (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r, d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.

   (b) Ta nu istället en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0).

   (c) Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm bilden av en cirkel med centrum i origo under den linjära avbildningen som ges av A. Bestäm en parametrisering och en ekvation för bilden.

   (d) (Om ni hinner) Bestäm en parametrisering av kurvan $x^4 + y^4 = r^2$. Eventuellt kan man ha nytta av funktionen

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t = 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

2. Lös uppgift 2.57a i boken (i vissa äldre upplagor är det 2.58a, texten ska börja med "Konstruera en ..."). Låt de 9 procenttalen utgöra en 3×3-matris A och antag att en 3-vektor $\mathbf{v}$ innehåller antalet i storstad, tätort respektive landsbygd (efter 0 år). Hur många finns det i de tre olika kategorierna efter 1 år? Efter 2 år? Efter n år? (Inga siffror. Bara bokstäverna A, $\mathbf{v}$ och n.)

3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$-matris med en $n \times p$-matris?

4. Antag att vi är i $\mathbb{R}^3$.

   (a) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

   Det finns olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. (Tänk geometriskt!)

   (b) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

   Det finns återigen olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. Vissa fall är svåra att ge några enkla villkor på, men gör ert bästa.

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.

   (a) Vad händer om man multiplicerar en över-(under-)triangulär matris med en annan över-(under-)triangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär?

   (b) Visa att (nästan) varje 2×2-matris $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där
   $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$
   Bestäm L och U uttryckt i a, b, c och d. Vilka A kan inte skrivas som $A = LU$?

   (c) (Om ni hinner) Visa att motsvarande resultat också gäller för varje 3×3-matris.

Datorövningar

1. För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t. Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π", utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.

   (a) Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : pi$ och $t = 0 : pi/16 : pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentar?

   (b) Vad händer om du t ex tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna cos, tan, arctan och exp (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.

   (c) Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.

   (d) Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (för några olika k) har 'deformerat' den. Prova gärna också att t ex rotera den.

2. Lös uppgift 2.58b i boken. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 år? (Vi gör antagandet att flyttningsmönstret är oförändrat hela tiden, vilket givetvis är totalt befängt i perspektivet 100000 år.) Testa med följande startfördelningar: alla bor i storstad, alla bor i tätort, alla bor på landsbygden samt lika många i de tre kategorierna.

3. Låt A vara en 5000×1000-matris, B en 1000×2000-matris samt $\mathbf{x}$ en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten $AB\mathbf{x}$: $(AB)\mathbf{x}$, $A(B\mathbf{x})$ samt $AB\mathbf{x}$ (d v s att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentar, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?

Uppgift 4 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 16 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!