Invers

Definition 1 **Identitetsmatrisen** *(enhetsmatrisen) av storlek n, $I = I_n$, är den $n \times n$-matris som har ettor på diagonalen och nollor för övrigt.*

Den kallas för identitetsmatris eftersom den verkar som identitet vid multiplikation, d v s

$$A = I_n A = A I_n,$$

för alla $n \times n$-matriser A.

Definition 2 *Låt A vara en kvadratisk matris. En matris B kallas för* **inversen till** *A om*

$$AB = BA = I$$

Om en sådan matris existerar så betecknas den A^{-1}.

Exempel 1 *Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ och antag att $\det A \neq 0$. Då är*

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en invers till A vilket man lätt kontrollerar genom att multiplicera A och B.

Vi såg i exemplet att om A är en 2×2-matris och $\det A \neq 0$ så har A en invers. Omvänt så har vi

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$$

så

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Detta ger att $\det A \neq 0$ är nödvändigt för att A^{-1} ska existera. Det sista argumentet gäller även för 3×3-matriser (och även godtycklig storlek i själva verket). Vi har alltså för 2×2-matriser visat att

$$A^{-1} \text{ existerar} \iff \det A \neq 0.$$

Detta påstående gäller även för godtycklig storlek vilket vi återkommer till senare.

Vektorprodukt

Vi såg senast att absolutbeloppet av determinanten gav areaförändringen för en linjär avbildning i planet. Speciellt såg vi (även om vi formulerade det lite annorlunda) att arean av den parallellogram som spändes upp av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ var $|\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}|$. Man kan också uttrycka denna area som

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha,$$

där α är minsta vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Detta kan man se genom att observera att om $\mathbf{u}$ utgör basen så är höjden i parallellogrammen inget annat än $|\mathbf{v}| \sin \alpha$.

Definition 3 *En vektortrippel* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *i rummet säges vara* **högerorienterad** *om vyn från* $\mathbf{w}$*:s spets ger att minsta vridningen från* $\mathbf{u}$ *till* $\mathbf{v}$ *är moturs (positiv). Om det är tvärtom så säges den vara* **vänsterorienterad**.

Ett annat sätt att säga detta är att tummen, pekfingret och långfingret på höger hand (i den ordningen) utgör ett högerorienterat system (om långfingret pekar uppåt) och motsvarande på vänsterhanden utgör ett vänsterorienterat system.
Vi ska nu definiera en produkt mellan vektorer i rummet. Observera att detta är en operator på vektorerna i rummet och alltså ger en vektor (till skillnad från skalärprodukten). Notera också att den inte är definierad i planet.

Definition 4 *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer i rummet och låt* α *vara minsta vinkeln mellan dem. Vi definierar då* **vektorprodukten**, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *som den unika vektor som uppfyller:*

1. *om* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är parallella så är* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$, *d v s lika med arean av parallellogrammen som* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *spänner upp.*

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *är ortogonal mot både* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$.

4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ *utgör ett högersystem.*

Det står i definitionen "den unika vektor som uppfyller" så att det krävs ett argument för att visa att definitionen är korrekt. Det andra villkoret bestämmer ju längden på $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Det tredje villkoret ger att den är en normal till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Detta ger två möjligheter: 'uppåt' eller 'nedåt'. Denna tvetydighet tas om hand av det sista villkoret och därmed är också riktningen unikt bestämd och därmed är vektorn unikt bestämd.

Exempel 2 *Låt* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ *vara en högerorienterad ON-bas (om vi inte säger annat så kommer en bas alltid att antas vara högerorienterad). Vi har att* $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ *eftersom arean av parallellogrammen som spänns upp av* $\mathbf{e}_x$ *och* $\mathbf{e}_y$ *är* 1 *och därmed lika med* $|\mathbf{e}_z|$ *och dessutom per definition av* $\mathbf{e}_z$ *så är* $\mathbf{e}_z$ *ortogonal mot båda de andra basvektorerna och* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ *är högerorienterad enligt antagandet.*

Sats 1 *Låt* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *vara tre vektorer i rummet. De uppfyller:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

2. $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, $c \in \mathbb{R}$.

3. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

Av dessa är de två första enkla, medan den tredje har ett icke-trivialt bevis som till stora delar finns i boken. Vi ska nu utnyttja dessa regler för att ge en mycket användbar formel i koordinatform för vektorprodukten så att man lätt kan räkna ut den för godtyckliga vektorer.

Sats 2 *Låt* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^t$ *och* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}^t$ *i en (högerorienterad) ON-bas. Då gäller att*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_x - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmärkning 1 *Determinanten i satsen ska enbart ses som en formell determinant som kan användas som minnesregel, eftersom elementen i första raden är vektorer och ej tal.*

Bevis. Genom att göra samma resonemang som i exemplet ovan för övriga kombinationer av basvektorerna så får vi:

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z,\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y,\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0},\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0},\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \end{array}$$

Om man använder detta och räknereglerna ovan så får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z) \times (x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{e}_x - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\mathbf{e}_y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

□

Exempel 3 *Bestäm en vektor som är vinkelrät mot både* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t$ *och* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^t$. *Per definition är* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonal mot både* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$. *Vi beräknar* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *med hjälpa av satsen och får*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \\ -2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

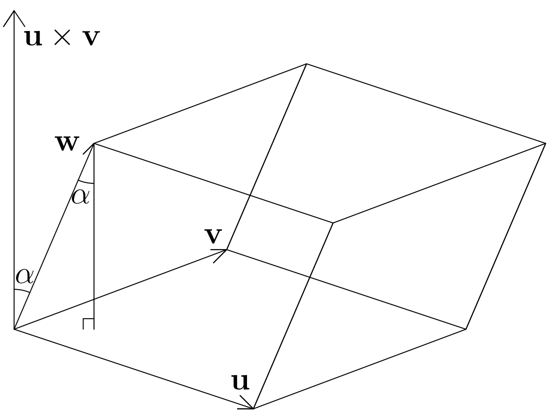
Vi ska nu bland annat visa att determinanten för en 3×3-matris verkligen ger volymförändringen. Först observerar vi att om $M = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$ så avbildar M enhetskuben på den parallellepiped som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Alltså ger volymen av parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ den volymförändring som den linjära avbildningen given av M ger. Formlerna för skalär- och vektorprodukt i koordinatform ger att

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{pmatrix}^t = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Den första likheten fås genom att transponera (som inte ändrar determinanten) och sedan göra två radbyten som byter tecken två gånger och därmed inte heller ändrar determinanten. Den andra likheten fås från formlerna.

(Man byter ut basvektorerna $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ mot $\mathbf{w}$:s koordinater i den formella determinanten.)
Vi ska nu beräkna volymen V av parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Antag först att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är ett högerorienterat system. Om α är vinkeln mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ så får vi (se figur)

$$V = \text{basytan} \times \text{höjden} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \alpha = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$



Detta var precis vad vi ville visa. Vi antog dock att vi hade ett högerorienterat system. Om istället $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är vänsterorienterat så observera att $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ är högerorienterat och vi får att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (-\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = -V,$$

enligt beräkningen för högerorienterade system ovan. Vi får alltså till slut att

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{cases} V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är högerorienterad,} \\ -V, & \text{om } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ är vänsterorienterad,} \end{cases}$$

där V är parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.