MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2009-03-12.
Lösningar

1. Vi beräknar determinanten för matrisen med vektorerna som kolumner och får $15-2a-a^2$. Vektorerna är linjärt beroende om och endast om determinanten är lika med 0. Vi löser alltså andragradsekvationen $15-2a-a^2=0$ vilket ger lösningarna $a_1=-5$ och $a_2=3$.

2. Låt Q beteckna den punkt på linjen som är närmast P. Vi ska beräkna $|\overrightarrow{PQ}|$. Vi vet att $Q=(3+s,4+2s,5+3s)$ för något s som vi måste bestämma. För att få fram s kan vi utnyttja att riktningsvektorn

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ och } \overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+s\\3+2s\\5+3s\end{pmatrix}$$

är ortogonala så

$$0=\mathbf{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=(1+s)+(6+4s)+(15+9s)=22+14s \iff s=-\frac{11}{7}.$$

Det ger

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+s\\3+2s\\5+3s\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} \text{ och } |\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{7}\sqrt{21}.$$

Alltså är det minsta avståndet $\sqrt{21}/7$.

3. Spegling i linjen $y=-x$ avbildar $(1,0)$ på $(0,-1)$ och $(0,1)$ på $(-1,0)$. Alltså är matrisen för speglingen

$$S=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Rotation $\pi/6$ radianer moturs har matrisen

$$R=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}&-\sin\frac{\pi}{6}\\\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Matrisen för spegling följd av rotation blir därmed

$$RS=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}.$$

4. (a) Vi vet att en 3×3-matris med tre linjärt oberoende egenvektorer är diagonaliserbar och vi använder diagonaliseringen baklänges här för att hitta A med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Sätt D som diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen och låt P vara matrisen med egenvektorerna som kolumner. Då är $A=PDP^{-1}$ en

matris med de efterfrågade egenskaperna. Eftersom egenvektorerna är ortogonala kan vi normalisera dem så att P blir en ON-matris och därmed $P^{-1} = P^t$. Alltså med

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

så är ett exempel på en eftersökt matris

$$A = PDP^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi kan se att de tre vektorerna är linjärt beroende genom att t ex beräkna determinaten

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Det finns en sats som säger att egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende. Vi har alltså en motsägelse så det kan omöjligt vara så att dessa tre vektorer kan vara egenvektorer till de tre olika egenvärdena 2, 1 respektive -1. (Detta är också den enda sak som kan förstöra för oss för om de är linjärt oberoende så fungerar strategin vi använde i lösningen av första deluppgiften.)

5. (a) Enligt definitionen av skalärprodukt gäller för vinkeln α mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ att

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

så $\alpha = \pi/3$ radianer eller 60 grader.

(b) Vektorn $\mathbf{v}_3$ ska alltså ligga i planet och vara ortogonal mot $\mathbf{v}_2$ så den ska uppfylla

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \text{ och } \mathbf{v}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

för några tal a och b. Om vi sätter in linjärkombinationen i den första ekvationen får vi

$$0 = (a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = a + b.$$

Vi har alltså lösningen $a = -b$ så

$$\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För att få längd 1 sätter vi $a = 1/\sqrt{3}$.

(c) Det finns två möjligheter och den som ger ett högerorienterat system är

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Alla vektorer i planet som vi projicerar på, d v s alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, är oförändrade och är alltså egenvektorer med egenvärdet 1. De vektorer som är ortogonala mot planet, d v s multiplar av $\mathbf{v}_3$, avbildas på nollvektorn och är alltså egenvektorer med egenvärdet 0. Detta är alla egenvärden och egenvektorer då vi har tre linjärt oberoende egenvektorer.

(b) Låt F vara matrisen som har basvektorerna som kolumner. I basen F är matrisen för avbildningen

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna är relaterad till matrisen A i standardbasen genom $A = FA_FF^{-1}$ och eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$ och vi får att

$$A = FA_FF^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Vår startfördelning är $\mathbf{x}_0^t = (1/3\ 1/3\ 1/3)$ och vi får fördelningen $\mathbf{x}_1^t$ efter ett steg genom

$$\mathbf{x}_1^t = \mathbf{x}_0^t M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

så sannolikheten att vara i nod a är $1/4$.

(b) Den stationära fördelningen $\mathbf{x}$ uppfyller $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t M$ vilket är ekvivalent med $M^t\mathbf{x} = \mathbf{x}$ som i sin tur är ekvivalent med $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} M^t - I &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & -20 & 8 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är $z = t$, $y = 2z/5 = 2t/5$ och $x = y = 2t/5$. Summan av elementen ska vara 1 så vi ska välja $t = 5/9$ och den sökta stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (2/9\ 2/9\ 5/9)$.

8. (a) Vi vet att egenvärdena är nollställen till det karakteristiska polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. För en 3×3-matris är detta ett tredjegradspolynom. Om man räknar ut detta så får man

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + b\lambda + c,$$

där b och c är kombinationer av koefficienterna som vi inte behöver bry oss om. Allmänt för ett tredjegradspolynom $p(x)$ gäller att om det har rötterna x_1, x_2 och x_3 så är

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Alltså är summan av rötterna lika med minus koefficienten framför x^2. För det karakteristiska polynomet betyder det att summan av egenvärdena (som ju är summan av rötterna) är lika med $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. (Notera att det är minustecken framför λ^3.) Detta var precis det vi ville visa.

(b) Samma resonemang fungerar för en $n \times n$-matris och ett polynom av grad n. I detta fallet är koefficienten framför x^{n-1} lika med minus summan av rötterna och när man räknar ut det karakteristiska polynomet så får man grad $n - 1$ på λ endast då man multiplicerar ihop alla elementen på diagonalen. Denna produkt ger

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \ldots.$$

Vi ser alltså återigen att summan av egenvärdena, d v s summan av rötterna, är lika med summan av elementen på diagonalen.