MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206 & TMV205, 2009-03-12.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Witt-Nyström, 0762-721860.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Bestäm alla värden på a för vilka de tre vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är linjärt beroende. (6p)

2. Bestäm (minsta) avståndet ifrån punkten $P = (2, 1, 0)$ till linjen

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 5 + 3t. \end{cases}$$

(6p)

3. Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i $\mathbb{R}^2$ som består av spegling i linjen $y = -x$ följt av rotation $\frac{\pi}{6}$ radianer moturs. (6p)

4. (a) Bestäm en 3×3-matris som har egenvärdena $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ respektive $\lambda_3 = -1$ med motsvarande ortogonala egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Om man sätter $\mathbf{v}_1 = (2\ 2\ -8)^t$ istället så finns det ingen matris med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Varför inte det? Motivera svaret väl. (6p)

Var god vänd!

5. (a) Beräkna vinkeln mellan

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ange om det är möjligt vinkeln exakt i radianer eller grader.

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_3$ sådan att den tillsammans med $\mathbf{v}_2$ utgör en ON-bas för planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

(c) Bestäm en vektor $\mathbf{v}_4$ sådan att $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ utgör en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. (8p)

6. Låt F vara ON-basen som består av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Låt f vara den linjära avbildningen i rummet som består av ortogonal projektion på planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Beteckna matrisen för f (i standardbasen) med A.

(a) Bestäm matrisen A:s samtliga egenvärden och egenvektorer.

(b) Bestäm matrisen A, d v s matrisen för f i standardbasen. (6p)

7. Betrakta en Markovkedja med tre noder a, b repsektive c som har övergångsmatrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Antag att vi väljer en startnod på måfå, d v s alla tre noderna med samma sannolikhet. Vad är sannolikheten att vi är i nod a efter 1 steg?

(b) Beräkna den stationära fördelningen. (6p)

8. (a) Låt A vara en 3×3-matris med egenvärden λ_1, λ_2 och λ_3. Visa att summan av dessa egenvärden är lika med summan av elementen på diagonalen i A (Summan av elementen i diagonalen kallas för *spåret* av matrisen.)

(b) Bevisa generaliseringen av första deluppgiften till en $n \times n$-matris A med n egenvärden. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 1 april. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.