Affina avbildningar och vektorgrafik

Stefan Lemurell

2010-02-04

Affin avbildning

Definition

En affin avbildning f är en sammansättning av en linjär avbildning

$$\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$$

och en translation

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{c}$$

och är alltid på formen

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

för en vektor $\mathbf{b}$ och en matris A.

Exempel på affin avbildning

Exempel

Speciellt är en linjär avbildning

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

en affin avbildning (med $\mathbf{b} = \mathbf{0}$) och även en translation

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(med $A = I$).

Exempel på affin avbildning

Exempel

Rotation β moturs kring en punkt (a, b) i planet är en affin avbildning.

Denna kan nämligen realiseras som sammansättningen

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

mellan translationen

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

Exempel på affin avbildning

den linjära avbildningen f_2 som är rotation β moturs kring origo samt translationen

$$f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vi får att

$$f(\mathbf{x}) = A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right).$$

Affina avbildningar och vektorgrafik

Affina avbildningar utgör en av grundpelarna inom vektorgrafik då de innefattar sådana grundläggande operationer som

- rotation
- projektion
- spegling
- translation

Affina avbildningar som linjära avbildningar

Vi ska nu se hur man kan representera affina avbildningar i planet som linjära avbildningar med 3×3-matriser.

Identifiera vektorn

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affina avbildningar som linjära avbildningar

och den linjära avbildningen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

med

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + 0 \cdot 1 \\ cx + dy + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Affina avbildningar som linjära avbildningar

Translation med $\binom{s}{t}$ kan nu representeras som matrismultiplikationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+s \\ y+t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att en affin avbildning $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

representeras med matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & s \\ c & d & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Affina avbildningar som linjära avbildningar

Speciellt kommer sammansättning av affina avbildningar att svara mot matrismultiplikation mellan 3×3-matriser.

Anmärkning

I praktiken behöver man ju bara 6 av elementen i matrisen och två i vektorn så man lagrar bara dessa och har multikationer

$$(a, b, c, d, s, t) \star (x, y) = (ax + by + s, cx + dy + t)$$

och

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, t_1) \star (a_2, b_2, c_2, d_2, s_2, t_2)$$

$$= (a_1 a_2 + b_1 c_2,\ a_1 b_2 + b_1 d_2,\ a_1 s_2 + b_1 t_2 + s_1,\ \ldots)$$

Affina avbildningar som linjära avbildningar

Motsvarande kan man göra för affina avbildningar i rummet som kan representeras som 4×4-matriser

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

för en affin avbildning $f = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Lagring av bilder

Det finns två huvudsätt att lagra bilder:

- pixelbaserat (jpeg, png, tiff etc.)
- vektorbaserat (svg, vml, ai etc.)

Vektorgrafik lagrar bilden som en sammansättning av enkla objekt såsom linjer, cirklar, polygoner och text. Dessa kan sedan enkelt och utan förlust i bildkvalité roteras, skalas och flyttas runt.

Scalable Vector Graphics

Scalable Vector Graphics (SVG) är standarden för vektorgrafik som tagits fram av W3C, så en standard för (framförallt) webb-sidor. Den är xml-baserad och en enkel fil kan se ut så här:

```
<?xml version=“1.0” encoding=“UTF-8”?>
<svg>
<ellipse cx=“60” cy=“26” rx=“22” ry=“7” stroke=“black”
stroke-width=“1” fill=“green”/>
<polygon stroke=“black” stroke-width=“1” fill=“red”
points=“23.08,49.88 55.00,46.22 60.61,63.77 42.09,81.07
10.17,83.26”/>
</svg>
```