

Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2014-03-13

1. Bassatsen och figur ger matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ för f och matrisen $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ för g .
Notera att $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Matrimultiplikation ger för den sammansatta avbildningen matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Triangeln ifråga är hälften av den parallelogram som har de två givna vektorerna som kantvektorer. Arean blir därför halva längden av vektorprodukten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

vilken med Pythagoras sats beräknas till $\sqrt{155}/2$.

3. Det ska förstas antas att planet innehåller origo, vilket indirekt framgår av formuleringen i (b), eller hur?

(a) Vi ritar figur med vektorn $\mathbf{v}$ ovanför projektionen $\mathbf{v}_\pi$ i planet. Vektorsubtraktion ger att vektorn från $\mathbf{v}$ ned till $\mathbf{v}_\pi$ är $\mathbf{v}_\pi - \mathbf{v}$. Skalning ger att vektorn från $\mathbf{v}$ till spegelpunkten $\mathbf{v}_s$ under planet är $2(\mathbf{v}_\pi - \mathbf{v})$. Vektoraddition ger slutligen att vektorn från origo till spegelpunkten är

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v} + 2(\mathbf{v}_\pi - \mathbf{v}) = 2\mathbf{v}_\pi - \mathbf{v}.$$

(b) Om A är den givna matrisen för projektionen och B är matrisen för speglingen, får vi från (a) att

$$B = 2A - I = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

4. Den karakteristiska ekvationen är

$$\det \begin{pmatrix} 8 - \lambda & -3 \\ 18 & -7 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Rötterna/egenvärdena är $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$. För $\lambda = 2$ löser vi ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 18 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ och får egenvektorer parallella med $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. För $\lambda = -1$ löser vi ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 18 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ och får egenvektorer parallella med $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. (a) Determinanterna beräknas till $\det F = -98$ respektive $\det G = 14$. Båda är nollskilda, vilket visar att vi har två baser.

(b) Koordinaterna i standardbasen är $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}.$

(c) Koordinaterna i basen G får vi till $\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$ genom att lösa ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 23 \\ -2 & 0 & 0 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$

6. Betrakta planet P som innehåller L_1 och som är parallellt med L_2 . Riktningsvektorer för linjerna ses vara

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

respektive, och en normalvektor till P blir därför $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ a \\ a \end{pmatrix}$. Med punkten $(1, 1, 0)$

i P , får vi dess ekvation till $-5(x-1) + a(y-1) + a(z-0) = 0$. Sökt värde på a ses vara det då punkten $(0, 1, -1)$, och därmed hela L_2 , ligger i P , det vill säga då $-5(0-1) + a(1-1) + a(-1-0) = 0$. Vi får $a = 5$, i vilket fall $P = \pi$ har ekvationen

$$-x + y + z = 0.$$

7. (a) Uppgiften är inte fullständigt formulerad: vi behöver också veta hur stor andel av djuren i åldersklassen > 2 år som överlever under ett år. Låt oss anta att denna andel är a . (Alla svar som utgår från något värde $0 \leq a \leq 1$ kan betraktas som "rätt svar".) Vi får modellen

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

där x_n betecknar antalet hondjur år n i åldersklassen $0-1$ år, y_n betecknar antalet hondjur år n i åldersklassen $1-2$ år, och z_n betecknar antalet hondjur år n i åldersklassen > 2 år.

(b) Att ett tillstånd $\mathbf{x}$ är stationärt betyder precis att $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Vi har icke-triviala lösningar, det vill säga $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, då $\det(A - I) = 0$. Denna ekvation blir $a - 1 + k/6 = 0$, vilket visar att det finns en stationär fördelning för populationen precis då $k = 6(1 - a)$. Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6(1-a) & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & a-1 & 0 \end{pmatrix},$$

och finner stationära tillstånd parallella med $\begin{pmatrix} 6(1-a) \\ 2(1-a) \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. (a) Den givna matrisen ses representera en rotation vinkeln $\pi/3$ moturs. Det finns därför uppenbarligen en lösning till matrisekvationen given av matrisen $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ för avbildningen som roterar vinkeln $\pi/6$ moturs.

(b) Den givna matrisen ses representera en spegling i linjen $y = x/\sqrt{3}$. Då vi inte kan spegla "en halv gång", borde inte det finnas en lösning B . Ett konkret bevis: Om sådan B finnes, skulle enligt räkneregler för determinanter

$$(\det B)^2 = \det \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -1.$$

Detta är omöjligt om vi räknar med reella matriser, som vi gör i denna kurs. (Betraktar vi däremot komplexa matriser, kan B hittas!)