

Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2014-08-28

1. Determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolonner beräknas till 7. Då speciellt denna determinant är nollskild så är de tre vektorerna linjärt oberoende, vilket betyder att ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.
2. En riktningsvektor för linjen är $(-1, 1, 4)^t$ och en normalvektor för planet är $(4, -1, -1)^t$. Vi beräknar vinkeln v mellan dessa vektorer med skalärprodukt: $-4 - 1 - 4 = \sqrt{18}\sqrt{18}\cos(v)$. Vi får $\cos(v) = -1/2$ och $v = 2\pi/3$. Den spetsiga vinkeln mellan den givna linjen och planets normallinje blir då $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$. Det följer att den spetsiga vinkeln mellan linjen och planet är $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$. Rita figur!

3. Vi Gausseliminera i totalmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ett möjligt tillvägagångssätt

är radoperationerna (1) rad 2 := rad 2 - rad 1 (2) byte av rad 2 och rad 3 (3) rad 3 := rad 3 / (-2) (4) rad 2 := rad 2 - rad 3 (5) rad 1 := rad 1 - 2 rad 3 (6) rad 1 := rad 1 - rad

2. Detta ger totalmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Den sökta inversen är därför

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .}$$

4. Lämpligt tillvägagångssätt är diagonalisering. Den karakteristiska ekvationen är $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, som ger egenvärden $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$. Egenvektorer för egenvärdet 1 löser systemet $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. En lösning är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Egenvektorer för egenvärdet 2 löser systemet $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En lösning är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. En diagonalisering blir därför $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. Vi beräknar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} .}$$

5. (a) Det finns sådan $\mathbf{v}_2$ då $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = (2 + 2 - 4)/9 = 0$. Vektorproduktens egenskaper används för att beräkna $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (b) Avbildningens matris i basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ses vara $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rita figur! Basbyttesformeln för matriser ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & -8 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

i standardbasen. Vi har använt att $A^{-1} = A^t$ för ON-matriser.

6. Vi kan rita grafen som en medurs orienterad kvadrat med noderna 2, 3, 4 och 5 som hörn, och med noden 1 i mitten, förbunden med alla hörn med kanter som alla är inåtriktade

utom den till nod 3. Grannmatrisen är $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Övergångsmatrisen M för

slumpvandringen fås genom normera raderna i A så att alla radsummor är 1. En stationär fördelning beräknas som en egenvektor till M^t med egenvärde 1, det vill säga vi löser ekva-

tionssystemet med totalmatris $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Gausselimination ger lös-

ningarna $\mathbf{x}^t = t(7/8, 1/4, 1, 1/2, 1)$. Parametern t väljs så att summan av vektorns koordinater blir 1, vilket ger oss den stationära fördelningen $\mathbf{x}^t = (7/29, 2/29, 8/29, 4/29, 8/29)$.

7. Antag $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} =: \mathbf{a}$. Fall 1: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Detta betyder enligt vektorproduktens egenskaper att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är parallella, det vill säga de är riktade längs en och samma linje. Fall 2: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Nu ger första likheten och vektorproduktens antisymmetri att $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Då $\mathbf{u} + \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, eftersom $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, så visar detta att det finns ett tal t så att $\mathbf{v} = t(\mathbf{u} + \mathbf{w})$. Detta insatt i $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$, ger $t\mathbf{u} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$, vilket förenklas till $\mathbf{0} = (t + 1)\mathbf{w} \times \mathbf{u} = (t + 1)\mathbf{a}$. Vi får $t = -1$ och därmed $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Omvänt kontrolleras att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ gäller om antingen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är parallella eller $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Svaret blir alltså att antingen är $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ parallella (de är parallella med en och samma linje) eller så är $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (de är kantvektorer i en triangel, alla orienterade moturs sett från lämpligt håll).

8. (a) Antag att $A^t A$ har k linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ med egenvärde 17. Då $A^t A \mathbf{v}_j = 17 \mathbf{v}_j$, ger multiplikation med A att $(A A^t)(A \mathbf{v}_j) = 17(A \mathbf{v}_j)$, för $j = 1, \dots, k$. Vi ser också att om $x_1 A \mathbf{v}_1 + \dots + x_k A \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, så följer att

$$\mathbf{0} = A^t(x_1 A \mathbf{v}_1 + \dots + x_k A \mathbf{v}_k) = 17(x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_k \mathbf{v}_k).$$

Då $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt oberoende, följer att $x_1 = \dots = x_k = 0$, och sålunda är även $A \mathbf{v}_1, \dots, A \mathbf{v}_k$ linjärt oberoende vektorer. Vi har visat att $A A^t$ har minst lika många linjärt oberoende egenvektorer med egenvärde 17 som $A^t A$. Genom att byta A och A^t i resonemanget ovan följer att $A A^t$ har högst lika många linjärt oberoende egenvektorer med egenvärde 17 som $A^t A$. Detta visar påståendet.

(b) En analys av beviset ovan visar att det kritiska med 17 är att vi kan dela med 17 för att kunna dra slutsatsen att $x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Påståendet gäller alltså för alla $\lambda \neq 0$. Att det inte gäller för $\lambda = 0$ ser man lätt genom exempel. Till exempel $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: Här har $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ egenvärden 0 och 2, medan $A A^t = 2$ har inget egenvärde 0.