

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2014-03-13

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Telefonvakt: Anna Persson, 0703-088304

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

1. Låt f vara den linjära avbildning av planet som speglar i linjen $y = -x$. Låt g vara den linjära avbildning av planet som roterar **medurs** vinkeln $\pi/4$ kring origo. Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som först avbildar först med g^{-1} , sedan med f , och sist med g . (6p)

2. Betrakta vektorerna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna arean av en **triangel** som har $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som två av sina tre kantvektorer. (6p)

3. Låt π vara ett plan i rummet.
- (a) Antag att projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på π är $\mathbf{v}_\pi$. Härled en formel för speglingen $\mathbf{v}_s$ av $\mathbf{v}$ i π , uttryckt i $\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}_\pi$. (3p)
- (b) Antag att matrisen för den linjära avbildning som projicerar på π är

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen för den linjära avbildning som speglar i π . (3p)

4. Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$. (6p)

Var god vänd!

5. Betrakta matriserna $F = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ och $G = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (a) Visa att kolonnvektorerna i F utgör en bas, och detsamma för G . (2p)
- (b) Betrakta vektorn $\mathbf{v}$ som har koordinater $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i basen F . Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ i standardbasen. (2p)
- (c) Bestäm koordinaterna i basen G för vektorn $\mathbf{v}$ från (b). (2p)
6. Linjen L_1 går genom punkterna $(1, 2, -1)$ och $(1, 1, 0)$. Linjen L_2 går genom punkterna $(0, 1, -1)$ och $(a, 2, 3)$. Bestäm värdet på parametern a så att linjerna L_1 och L_2 ligger i ett och samma plan π . Bestäm också, för detta a , ekvationen för planet π på normalform. (6p)
7. Vi tänker oss en indelning av populationen av rådjur i tre åldersklasser: $0-1$ år, $1-2$ år respektive > 2 år. Vi betraktar utvecklingen från år till år av antalet hondjur i respektive åldersklass. Av djur i första klassen överlever en tredjedel av djuren under ett år, och av djur i andra åldersklassen överlever hälften av djuren under ett år. Hondjur i sista klassen alstrar avkomma, k stycken hondjur var i snitt.
- (a) Formulera en matematisk modell $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ (ej nödvändigtvis en Markovkedja) för populationsutvecklingen över ett år. Ge speciellt en tydlig definition av vektorn $\mathbf{x}_n$, som ska beskriva fördelningen av populationen av hondjur över åldersklasserna. (3p)
- (b) För vilket värde på parametern $k = 1, 2, 3, \dots$, finns ett stationärt tillstånd? (Det vill säga ett som inte förändras från år till år.) Beräkna detta stationära tillstånd. (3p)
8. (a) Bestäm om möjligt en matris A sådan att $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, eller bevisa att sådan A ej existerar. (4p)
- (b) Bestäm om möjligt en matris B sådan att $B^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, eller bevisa att sådan B ej existerar. (4p)