Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2016-04-09

1. En tangentvektor/riktningvektor för L är $(-1,1,1)^t - (1,0,-2)^t = (-2,1,3)^t$, och en origopunkt på L väljer vi till P. Den sökta ekvationen blir $(1,0,-2)^t + t(-2,1,3)^t$. En vektor som är ortogonal mot L är till exempel $(1,2,0)^t$, då dess skalärprodukt med riktningsvektorn för L är 0. Ett exempel på sökt plans ekvation är därför $x + 2y = A$. Konstanten bestäms till $A = 1$ då P ska ligga i planet. Planets ekvation bli alltså $x + 2y = 1$. Då $2 - 2 = 0 \neq 1$, ligger inte punkten på detta plan. Den ligger därför speciellt inte på linjen.

2. Vi bestämmer f:s och g:s matriser med bassatsen. Matrisen för f ses vara $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Matrisen för g ses vara $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Den sökta matrisen för $g \circ f$ blir $BA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$.

3. Den karakteristiska ekvationen blir $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, då $18 \cdot 45 - 29 \cdot 28 = -2$. Rötterna, dvs egenvärdena, blir $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$. Det första leder efter förkortning till ekvationen $3x - 5y = 0$, så en egenvektor med egenvärde 2 är $(5,3)^t$. Det andra leder efter förkortning till ekvationen $2x - 3y = 0$, så en egenvektor med egenvärde -1 är $(3,2)^t$. En diagonalisering av matrisen är därför $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. Det följer att
$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 4^n - 9 & -15 \cdot 4^n + 15 \\ 6 \cdot 4^n - 8 & -9 \cdot 4^n + 10 \end{pmatrix}.$$

4. Vi beräknar determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -a-1 & 1 \\ 2a & a+2 & 2 \end{vmatrix} = 6a^2 + 13a$. Detta visar att systemet har en unik lösning då $a \neq 0$ och $a \neq -13/6$, oavsett högerled. Då $a = 0$ eller $a = -13/6$ har systemet oändligt många lösningar eller ingen lösning, beroende på vad högerledet är. Ett exempel då vi har oändligt många lösningar är $a = b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

5. Skalärprodukt mellan tangentvektor för linje och normalvektor för planet är $-4 - 1 - 4 = -9 \neq 0$. Därför skär linjen planet, och vinkeln α mellan dessa två vektorer ges av $-9 = \sqrt{18}\sqrt{18}\cos\alpha$, så $\alpha = 2\pi/3$. En figur avslöjar att den spetsiga vinkeln mellan linjen och planet blir $2\pi/3 - \pi/2 = \pi/6$.

6. Bassatsen och vektorproduktens definition visar att $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Detta pga $\mathbf{g}_2 \times (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 \times (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_2) = \mathbf{0}$ och $\mathbf{g}_2 \times (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_3$. På liknande sätt med bassatsen i standardbasen, får vi matrisen $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, eftersom $f((1,0,0)^t) = (5,-4,-2)^t/9$, $f((0,1,0)^t) = (-4,5,-2)^t/9$ och $f((0,0,1)^t) = (-2,-2,8)^t/9$. Från A_G ser vi direkt att f projicerar på planet som spänns upp av $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_3$.

7. Vi kan rita grafen som en medurs orienterad kvadrat med noderna $2, 3, 4$ och 5 som hörn, och med noden 1 i mitten, förbunden med alla hörn med kanter som alla är inåtriktade

utom den till nod 3. Grannmatrisen är $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Övergångsmatrisen M för slumpvandringen fås genom normera raderna i A så att alla radsummor är 1. En stationär fördelning beräknas som en egenvektor till M^t med egenvärde 1, det vill säga vi löser ekvationssystemet med totalmatris $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Gausselimination ger lösningarna $\mathbf{x}^t = t(7/8, 1/4, 1, 1/2, 1)$. Parametern t väljs så att summan av vektorns koordinater blir 1, vilket ger oss den stationära fördelningen $\mathbf{x}^t = (7/29, 2/29, 8/29, 4/29, 8/29)$.

8. Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vara standardbasen för $\mathbf{R}^n$. Vi påstår att basvektorernas bilder

$$\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n\}$$

också utgör en bas för $\mathbf{R}^n$. Då de är n till antalet, räcker det enligt sats att visa att de är linjärt oberoende. Antag därför

$$\lambda_1 A\mathbf{e}_1 + \lambda_2 A\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n A\mathbf{e}_n = 0.$$

Multiplicera denna ekvation från vänster med B. Detta ger $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n = 0$, och därmed $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, eftersom $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ är linjärt oberoende. Alltså har vi visat att $\{A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{e}_n\}$ utgör en bas. Speciellt spänner dessa vektorer upp $\mathbf{R}^n$, och det finns en unik vektor $\mathbf{v} = (v_1, cv_2, \ldots, v_n)^t$ sådan att $\mathbf{e}_1 = v_1 A\mathbf{e}_1 + v_2 A\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n A\mathbf{e}_n = A\mathbf{v}$. På liknande sätt ser vi att det finns vektorer $\mathbf{c}_k$ ($\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}$) sådana att $A\mathbf{c}_k = \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Matrisen C med $\mathbf{c}_k$ som kolumnvektorer ses nu vara en högerinvers till A.

För (b) påstår vi att $C = B$. Detta följer av

$$C = (BA)C = B(AC) = B,$$

där vi använt att B är en vänsterinvers, att matrismultiplikation är associativ och att C är en högerinvers.