

Icke-linjära avbildningar

Instruktioner

Denna gruppövning ska inte redovisas skriftligt eller muntligt, men allt material nedan ingår i tentamen. Närvaro är dock obligatorisk, och ni ska under första och andra timmen gruppvis muntligt redovisa följande.

- Från gruppövning 1: Teoriuppgift 2 och matlabuppgift 3.
- Från gruppövning 2: Teoriuppgift 2 och matlabuppgift 4.

Vi börjar 8.00 (grupperna 1-10) respektive 13.15 (grupperna 11-20), då alla ska vara närvarande i grupprummen för att bli godkända på den muntliga redovisningen (och därmed slippa en mer arbetsam komplettering). Fem av grupperna har redovisning 8.00-8.45 respektive 13.15-14.00. De övriga har redovisning 9.00-9.45 respektive 14.15-15.00. Gruppen ska ha förberett en 10 minuter (strikt!) presentation av var och en av dessa 4 uppgifter. Vilken ni ska redovisa meddelas på plats.

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

- (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r , d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.
 - (b) Gör samma sak för en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0) .
 - (c) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Betrakta bilden i u, v -planet av en cirkel (i x, y -planet) med centrum i origo under den linjära avbildningen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestäm en parametrisering och en ekvation för denna bild.
2. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$ -matris med en $n \times p$ -matris?
 3. Vi vet hur vi kan addera och multiplicera två komplexa tal $z = x + iy$ och $w = u + iv$. Komplexa tal är ju inget annat än plana vektorer $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, mellan vilka den "komplexa produkten" $zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$ används. Vi ska nu se hur denna produkt är ett specialfall av matrismultiplikation, om vi identifierar ett komplext tal $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med matrisen $A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.
 - (a) Visa att addition och multiplikation av matriserna $A(z)$ och $A(w)$ motsvarar addition och multiplikation av de komplexa talen z och w .
 - (b) Beskriv geometriskt vad $A(i)$ åstadkommer.
 - (c) Låt f vara komplex kvadrering av plana vektorer/komplexa tal: $f(z) = z^2$. Beräkna vektorns z^2 två koordinater uttryckt i koordinaterna x, y för z , dels med den komplexa produkten zz och dels med matrisprodukten $A(z)A(z)$. Visa att f inte är en linjär funktion.

Datorövningar

- För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t . Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π ", utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.

 - Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : \pi$ och $t = 0 : \pi/16 : \pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentarer?
 - Vad händer om du t ex tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna $\cos$, $\tan$, $\arctan$ och $\exp$ (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.
 - Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.
 - Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (för några olika k) har 'deformerat' den. Prova gärna också att t ex rotera den.
- Låt A vara en 5000×1000 -matris, B en 1000×2000 -matris samt $\mathbf{x}$ en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten $AB\mathbf{x}$: $(AB)\mathbf{x}$, $A(B\mathbf{x})$ samt $AB\mathbf{x}$ (dvs att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentarer, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?
- Låt $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ vara den komplexa kvadreringsfunktionen (en icke-linjär avbildning) av plana vektorer från teoriuppgift 3. Vi väljer en favoritpunkt: $P = (3, 1)$, eller med komplex notation $P = 3 + i$. Runt denna tittar vi nu på den axelparallella kvadrat, låt oss kalla den D_t , som har sidlängd $2t$ och P i centrum. Kurvan D_t består alltså av två vertikala linjer, på avstånd t till höger och vänster och P , och två horisontella linjer över och under P på avstånd t .

Vi ska i denna övning studera utseendet av bilden under f av kvadraten D_t , vilken vi kallar $f(D_t)$, för olika värden på t . Eftersom f inte är linjär, kommer inte den av f deformerade kvadraten vara en parallelogram som i det linjära fallet. Skriv en funktion som tar t som argument och ritar upp $f(D_t)$. Titta först på $f(D_t)$ för relativt stora värden på t , t ex $t = 1, 2, 3, 4$. Rita sedan $f(D_t)$ för små positiva värden på t , mycket mindre än 1. Låt hela tiden matlab skala om din figur, så att figuren $f(D_t)$ är ungefär lika stor oavsett t -värde. Beskriv vad som händer med **formen** på $f(D_t)$ då t blir stor respektive när t blir liten.