Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 5

1. Visa att det för alla udda heltal n gäller att $8|n^2-1$.

2. Hur många heltal mellan 1 och 1000 är delbara med minst ett av talen 2, 3 eller 5?

3. Antag att a och b är positiva heltal sådana att $a > b$ och $\mathrm{sgd}(a,b) = 1$. Visa att $\mathrm{sgd}(a-b, a+b)$ är antingen 1 eller 2.

4. Finn de heltal x som är kongruenta med 34 modulo 83 och kongruenta med 26 modulo 110.

Lösningar

1. Låt n vara ett godtyckligt udda heltal. Eftersom n är udda finns det ett heltal k sådant att $n = 2k+1$. Enligt konjugatregeln gäller att $n^2-1 = (n+1)(n-1) = (2k+2)\cdot 2k = 4k(k+1)$. Om nu k är jämnt kan vi skriva $k = 2j$ för ett heltal j och får därmed att $n^2-1 = 8j(2j+1)$ och därmed att $8|n^2-1$. Om k istället är udda kan vi skriva $k = 2j-1$ för ett heltal j och får då $n^2-1 = 8j(2j-1)$ och även i detta fall gäller $8|n^2-1$. Saken är klar.

2. Låt $U = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ och sätt $A = \{n \in U : 2|n\}$, $B = \{n \in U : 3|n\}$ och $C = \{n \in U : 5|n\}$. Vi söker $|A \cup B \cup C|$. Man inser, till exempel med hjälp av ett Venn-diagram, att

   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

   (Denna formel kallas för *inklusion-exklusions-formeln*. Man får gärna lov att ta den som om den vore ett axiom, men i själva verket går den att i två steg bevisa utifrån summationsprincipen: Steg 1: $|A\cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = (|A \setminus B| + |A \cap B|) + (|B \setminus A| + |A \cap B|) - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, där bägge likheterna följer av summationsprincipen då ju bägge handlar om antal element i disjunkta mängder. Steg 2: Använd resultatet från steg 1 på $|(A \cup B) \cup C|$ och manipulera med hjälp av kända mängdidentiteter.)

   Vi har att $|A| = 500$, $|B| = 333$, $|C| = 200$, $|A \cap B| = |\{n \in U : 6|n\}| = 166$, $|A \cap C| = |\{n \in U : 10|n\}| = 100$, $|B \cap C| = |\{n \in U : 15|n\}| = 66$ och $|A \cap B \cap C| = |\{n \in U : 30|n\}| = 33$. Därför blir $|A \cup B \cup C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$.

3. Det gäller att visa att om $d|a+b$ och $d|a-b$ så gäller att $d|2$. Men om $d|a+b$ och $d|a-b$ gäller att $d|(a+b)+(a-b)$ och $d|(a+b)-(a-b)$, dvs $d|2a$ och $d|2b$ och därmed att $d|sgd(2a, 2b)$. Eftersom a och b är relativt prima gäller att $sgd(2a, 2b) = 2$ och därmed att $d|2$ som önskat.

4. Detta är en direkt tillämpning av kinesiska restsatsen.