

ANALYS AV 21-SPELET

Theorem 0.1. *Första spelaren vinner om och endast om man börjar från ett tal n som inte är en multipel av 4, förutsatt att båda spelarna spelar optimalt.*

Bevis. Våra predikat är

$Q(n)$: Första spelaren vinner om man börjar från n .

$R(n)$: n är ej en multipel av 4.

$P(n)$: $Q(n) \Leftrightarrow R(n)$, dvs första spelaren vinner om och endast om n är ej en multipel av 4.

Vi vill bevisa via stark induktion att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

STEG 1: Visa att $P(1)$ är sann.

Här är $R(1)$ uppenbarligen sann så vi måste visa att $Q(1)$ också är det, dvs att första spelaren vinner då man börjar från 1. Men detta är i sin tur uppenbart, för första spelaren får lov att ta bort 1.

STEG 2: Visa att $P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Låt oss börja från $n+1$. Första spelaren kan ta bort 1, 2 eller 3, och kan därmed hamna i n , $n-1$ eller $n-2$. Han vill hamna i ett tal därifrån första spelaren inte vinner, dvs han vill hamna i ett tal t där $Q(t)$ är falsk. Enligt den starka induktionshypotesen så är $P(t)$ sann för alla $t \leq n$, dvs $Q(t)$ är falsk om och endast om $R(t)$ är det, dvs om och endast om t är en multipel av 4. Så första spelaren vinner om minst ett av talen n , $n-1$ eller $n-2$ är en multipel av 4. Och detta gäller om och endast om $n+1$ inte är en multipel av 4, v.s.v. ■