

Inledande diskret matematik D, HT2015

Extra demouppgift 8/10

Låt Q_n vara grafen vars noder är alla binära strängar av längd n och där en kant sätts mellan två noder om motsvarande strängar skiljer sig i exakt en position. Q_n kallas för den n -dimensionella hyperkuben.

1. Rita upp Q_1 , Q_2 och Q_3 på ett sådant sätt som förklarar namnen.
2. Är Q_3 en planär graf?
3. För vilka n har Q_n en Eulercykel?
4. Bevisa att Q_n har en Hamiltoncykel för alla $n \geq 2$.

Lösningar:

1. Se bilden på nästa sida.
2. Ja, det är den. Se bilden på nästa sida.
3. Q_n är en reguljär graf av grad n , dvs varje nod har grad n , för det finns n bitar i en sträng som kan bytas från 0 till 1 eller vice versa. Således har Q_n en Eulercykel om och endast om n är jämnt.
4. Induktion på n . För $n = 2$ har vi t.ex. Hamiltoncykeln

$$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00.$$

Antag att

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{2^n} \rightarrow v_1 \tag{1}$$

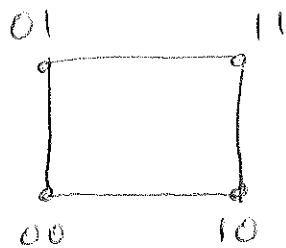
är en Hamiltoncykel i Q_n . En nod i Q_{n+1} kan betecknas som antingen $0v$ eller $1v$, där $v \in Q_n$. M.a.o. första biten är noll eller ett och resten av bitarna utgör en nod i Q_n . Följande blir nu en Hamiltoncykel i Q_{n+1} , där pilarna i första raden syftar på vägen i (1) ovan och i andra raden på samma väg fast baklänges:

$$\begin{aligned} &0v_1 \rightarrow 0v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow 0v_{2^n} \rightarrow \\ &\rightarrow 1v_{2^n} \rightarrow 1v_{2^n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow 1v_2 \rightarrow 1v_1 \rightarrow 0v_1. \end{aligned}$$

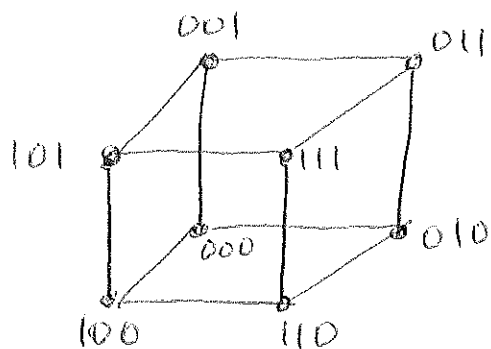
#1



Q_1



Q_2



Q_3

#2

