

Inledande diskret matematik D, HT2015
Extra demouppgifter 8/10

1. Hur många heltalslösningar finns det till ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 11$$

- (a) om $x_i \geq 0$ för alla i ?
 - (b) om $x_i \geq 1$ för alla i ?
 - (c) om $x_i \geq -1$ för alla i ?
 - (d) om $0 \leq x_i \leq 5$ för alla i ?
2. Låt $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En permutation $f : S \rightarrow S$ kallas för ett *derangemang* om $f(s) \neq s$ för alla $s \in S$. Bestäm antalet derangemang av S .
3. Bestäm koefficienten av $x^3 y^5 z^6 w^3$ i utvecklingen av $(2x - y + z - 3w)^{17}$.

Lösningar:

1. (a) Uppgiften är att placera 11 identiska bollar i 7 åtskiljbara lådor, så antalet lösningar är $\binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{6}$.
- (b) Låt $y_i := x_i - 1$. Då är $y_i \geq 0$ och $\sum_{i=1}^7 y_i = 4$. Så det är som i del (a) fast nu ska bara 4 bollar placeras. Så antalet lösningar är $\binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4}$.
- (c) Låt $z_i := x_i + 1$ så $z_i \geq 0$ och $\sum_{i=1}^7 z_i = 18$. Så det är som förut fast med 18 bollar. Svaret är $\binom{18+7-1}{18} = \binom{24}{6}$.
- (d) Vi tar svaret från del (a) och räknar bort de lösningar som motsätter villkoret, dvs de lösningar där något $x_i \geq 6$. Notera att det kan finnas högst ett sådant i , och det finns 7 val för vilket. Vi har 6 olika fall.

FALL 1: Något $x_i = 6$. Det finns 7 möjliga i . Antag att det är x_1 . Då är $\sum_{i=2}^7 x_i = 5$ och antalet lösningar till detta är antalet sätt att placera ut 5 bollar i 6 lådor, alltså $\binom{5+6-1}{5} = \binom{10}{5}$. Så antalet lösningar i Fall 1 är $7 \times \binom{10}{5}$.

FALL 2: Något $x_i = 7$. Då har vi 4 bollar kvar i stället så antalet lösningar blir i stället $7 \times \binom{4+6-1}{4} = 7 \times \binom{9}{4}$.

Fall 3-6, där något x_i är 8, 9, 10 resp. 11, behandlas likadant. När vi lägger ihop från alla sex fallen får vi det totala antalet lösningar som ska räknas bort från svaret i del (a). Så svaret här blir

$$\binom{17}{6} - 7 \times \left[\binom{10}{5} + \binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{5}{0} \right].$$

2. Låt U bestå av alla permutationer av S . Så $|U| = 5!$. Vi räknar bort följande fem delmängder:

$$A_1 = \{f \in U : f(1) = 1\},$$

$$A_2 = \{f \in U : f(2) = 2\},$$

$$A_3 = \{f \in U : f(3) = 3\},$$

$$A_4 = \{f \in U : f(4) = 4\},$$

$$A_5 = \{f \in U : f(5) = 5\}.$$

Notera att $|A_i| = 4!$ för vi kan fortfarande permutera de fyra talen förutom i på vilket sätt som helst. På samma sätt så är

$$\begin{aligned} |A_i \cap A_j| &= 3!, & |A_i \cap A_j \cap A_k| &= 2!, \\ |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| &= 1!, & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| &= 0! \end{aligned}$$

Sållprincipen innebär att

$$\left| \bigcup_{i=1}^5 A_i \right| = 5 \cdot 4! - \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{3} \cdot 2! - 5 \cdot 1! + 0! = \dots = 76.$$

Så antalet derangemang är $|U| - |\cup_{i=1}^5 A_i| = 120 - 76 = 44$.

3. Antalet sätt att plocka ur de 17 paranteserna 3 st x , 5 st y , 6 st z och 3 st w är $\frac{17!}{3!5!6!3!}$. Så efter ihopsamling av termer kommer vi att få termen

$$\frac{17!}{3!5!6!3!} (2x)^3 (-y)^5 z^6 (-3w)^3 = \frac{17!}{3!5!6!3!} 2^3 (-1)^5 (-1)^3 3^3 x^3 y^5 z^6 w^3.$$

SVAR: $6^3 \times \frac{17!}{3!5!6!3!}$.