

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Adam Malik, ankn 5325
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: Johanneberg, 08:30-12:30

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-
tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G S F Ö R S L A G

- 1 Denna uppgift omfattar 14 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

-
- 2 Man vill lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_2 + 6x_3 = 20 \\ -x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 30 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

och har använt ett kommando i Matlab som heter `lu` för att beräkna tre matriser $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ och $\mathbf{U}$ enligt körningsexemplet nedan.

```
>> [L,U,P]=lu(A)
```

```
L =      1      0      0  
      -1      1      0  
      0     1/6      1
```

```
U =     -1      8      5  
      0      6      6  
      0      0      5
```

```
P =      0      1      0  
      0      0      1  
      1      0      0
```

Matrisen $\mathbf{A}$ som används i anropet är koefficientmatrisen för ekvationssystemet ovan och har definierats före anropet till `lu`.

(a) Beräkna matrisprodukten $\mathbf{LU}$. (3p)

(b) Lös det linjära ekvationssystemet genom att lösa de två systemen (4p)

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

där $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$ är högerledsvektorn och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ i systemet ovan.

(c) Lös det linjära ekvationssystemet med vanlig Gausselimination istället. Berätta (4p)
i varje steg vad du gör.

Lösningsförslag:

$$(a) \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(b) \text{ Vi har att } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ (Inversen kan antingen beräknas på vanligt sätt$$

genom att lösa systemet med totalmatrisen $[\mathbf{P} \mid \mathbf{I}]$ eller genom att utnyttja att $\mathbf{P}$ ju är en permutationsmatris).

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/6 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right], \text{ dvs. } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 5 & 30 \\ 0 & 6 & 6 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right]. \text{ Bakåtsubstitution ger } x_3 = 3, x_2 = (30 - 18)/6 = 2 \text{ och } x_1 = -(30 - 16 - 15) = 1.$$

$$(c) \text{ Utökad matris: } \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6 & 20 \\ -1 & 8 & 5 & 30 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \text{Radbyten} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 5 & 30 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \end{array} \right] \sim$$

$$\text{eliminera 1:an i första kolumnen} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 5 & 30 \\ 0 & 6 & 6 & 30 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \end{array} \right] \sim \text{eliminera 1:an i 2:a kolumnen} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 5 & 30 \\ 0 & 6 & 6 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right]. \text{ Bakåtsubstitution ger } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3 Bestäm ekvationen (på normalform) för ett plan som innehåller linjen (5p)

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Hur många sådana plan finns det?

Svar:

Det finns oändligt många plan som innehåller linjen, tex. $x + 2y - 4 = 0$

4 (a) Definera begreppet linjärt oberoende. Ge exempel dels på tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som (3p)

är linjärt oberoende, dels på tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linjärt beroende.

(b) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara radekvivalenta (dvs. den en erhålls från den andra med elementära radoperationer) 3×3 matriser. Måste då $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ ha samma egenvärden? (Bevisa eller ge motexempel). (3p)

(c) Låt $\mathbf{A}$ vara en 3×3 matris sådan att $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Måste det då gälla att $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ eller $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$? (Motivera ditt svar). (3p)

Lösningsförslag:

(a) För definitionen ser litteraturen. Tre stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ är tex. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tre linjärt beroende vektorer är $\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_1, 3\mathbf{v}_1$.

(b) Nej, låt tex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då är $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ och $\mathbf{A}$ har egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ och $\mathbf{B}$ har egenvärden $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

(c) Nej, låt tex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, då är $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

- 5 (a) En sk. Givens rotation är en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ som ofta används i datorberäkningar för att nollställa element i vektorer. Standardmatrisen för en Givens rotation i $\mathbb{R}^2$ har formen (4p)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

Bestäm a och b så att vektorn $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ roteras till $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) Är avbildningen i $\mathbb{R}^2$ ovan ovan omvändbar? I såfall vilken standardmatris har den? (2p)

Lösningsförslag:

(a) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 5 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \text{ och } \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \end{array} \right].$

Svar $a = 4/5, b = -3/5$.

(b) Ja avbildningen är omvändbar och standardmatrisen ges av

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

- 6 Låt $G = (V, E)$ vara grafen med noderna $V = \{1, 2, 3, 4\}$ och kanterna

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

(a) Ta fram grannmatrisen och den stationära fördelningen för slumpvandringen på grafen. (3p)

(b) Beräkna (med hjälp av matrisalgebra) hur många olika vägar det finns av längd (2p)

3 från nod 1 till nod 3.

Svar:

(a) Grannmatris, $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Stationär fördelning, $x = \begin{bmatrix} 2/10 \\ 3/10 \\ 3/10 \\ 2/10 \end{bmatrix}$

(b) $A * A * A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $a_{1,3} = a_{3,1} = 5$. Svar 5 vägar.

1 (a) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Svar: $\arccos(-4/\sqrt{154})$.

1 (b) Beräkna $\mathbf{A}^{-1}$ om $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (3p)

Svar: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

1 (c) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm determinanten till $\mathbf{A}$. (2p)

Svar: $\det(\mathbf{A}) = 18$

1 (d) Beräkna den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ på linjen med ekvationen (3p)

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Svar: Projektionen $\mathbf{u}_L = -\frac{4}{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

1 (e) Bestäm den räta linje som är bäst anpassad till punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 3)$ enligt minsta kvadratmetoden. (3p)

Svar: $y = 3/2x + 4/3$